２０１４年０７月２８日

株式会社 菅原研究所 井上 秀喜
Hideki Inoue, SUGAWARA Laboratories Inc.

アンデロン振動 Anderon vibration

アンデロン振動の測定は，玉軸受の品質を検査する方法として，従来からよく知られている．本文では，玉軸受のアンデロン振動を定義し，アンデロン振動の計算モデルを構成し，モデルの挙動を調べ，実測結果と比較する．

Anderon Vibration measurement is known as a quality check method of ball bearings. We define the Anderon vibration, compose the calculation model, research the model behavior, and compare to the measurement.

１．アンデロン振動の定義 Anderon vibration define

１．１ 運転状態 Running condition

図１は，玉軸受の外輪から軸方向に力を加えて，内輪を駆動軸で回す運転状態を表す．
ボールの間隔を維持する保持器は，必要な要素であるが，図１では省略している．
シール，グリス または 潤滑油も，実際に必要な構成要素であるが，図１では省略している．

Fig.1 shows a ball bearing pressed outer ring and driven inner ring to rotate.
Balls are kept same distance each other by the cage omited in Fig.1.
Seals and greace or lubricant omited in Fig.1 are also necessary.

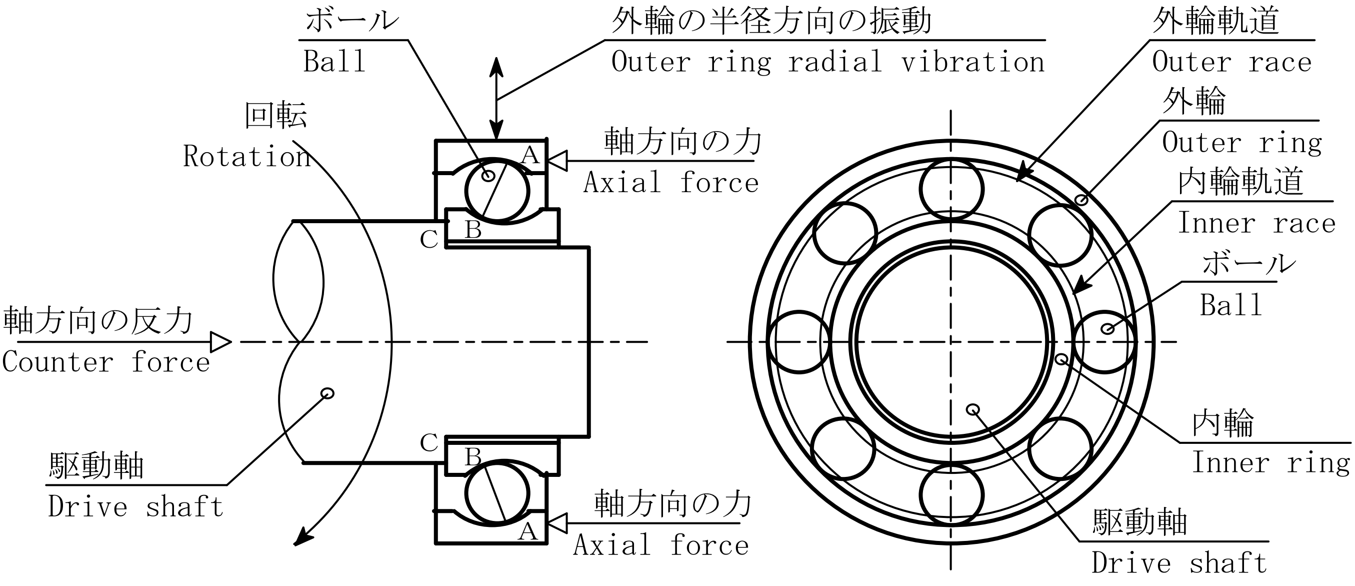


図１：玉軸受の外輪に軸方向の力を加えて内輪を駆動軸で回す運転状態
Fig.1 : Ball bearing pressed outer ring and driven inner ring to rotate

図１において，外輪を押す軸方向の力は，点Ａでボールに，点Ｂで内輪に，端面Ｃで駆動軸に伝達され，軸方向の反力と釣り合う．
内輪は駆動軸と一体となって回転し，ボールは点Ａ，Ｂを含むボール自身の赤道円で，内輪と外輪の軌道上を転がり，外輪は回転しないものとする．
この運転状態における外輪の半径方向の振動を ″アンデロン振動″ と呼ぶ．
アンデロンメータは，この ″アンデロン振動″ を測定する装置である．

In Fig.1 the axial force balance with the counter force through the point A, B, and the edge C. The inner ring rotates with the drive shaft. The ball rolls between the inner and outer race in the ball's great circle including the point A and B. And the outer ring is stationary.
We call it ″Anderon vibration″ that outer ring radial vibration in this condition.
The ANDERON METER is an instrument for this ″Anderon vibration″ measurement.

１．２ アンデロン振動の値　Andeon vivration value

アンデロン振動の単位に用いる ″Anderon″ は，1944 年のチェイニーらの論文[1)]で発表された．単位 Anderon は，マイクロインチ毎ラジアン毎オクターブの２分の１乗を意味する．

The ″Anderon″ as the unit was announced in Channay's group article[1)] in 1944. This unit Anderon means microinches per radian per octave to the one-half power.

$$V = \frac{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)_{r.m.s}}{\sqrt{\log_2 \frac{n_H}{n_L}}} \qquad \cdots (1)$$

V ［Anderon］ ： アンデロン振動の値
Andeon Vivration Value

x ［μ inch］ ： 外輪の半径方向の変位
Outer ring radial displacement

θ ［radian］ ： 内輪の回転角度
Inner ring rotary angle

$\log_2 \frac{n_H}{n_L}$ ［—］ ： バンドパスフィルタ通過帯域のオクターブ
Octave of the band-pass filter pass band

この論文に記載されたアンデロン振動のスペクトラムの例を，図２に引用する．
図２は，連続スペクトラムであるように見える．しかし，アンデロン振動の計算モデルは，離散スペクトラムを生成するものとなる．

Fig.2 is the Anderon vibration spectrum quoted from the article.
Fig.2 seems like a continuous spectrum. But, our Andeon vibration model shall be to generate discrete spectrum.

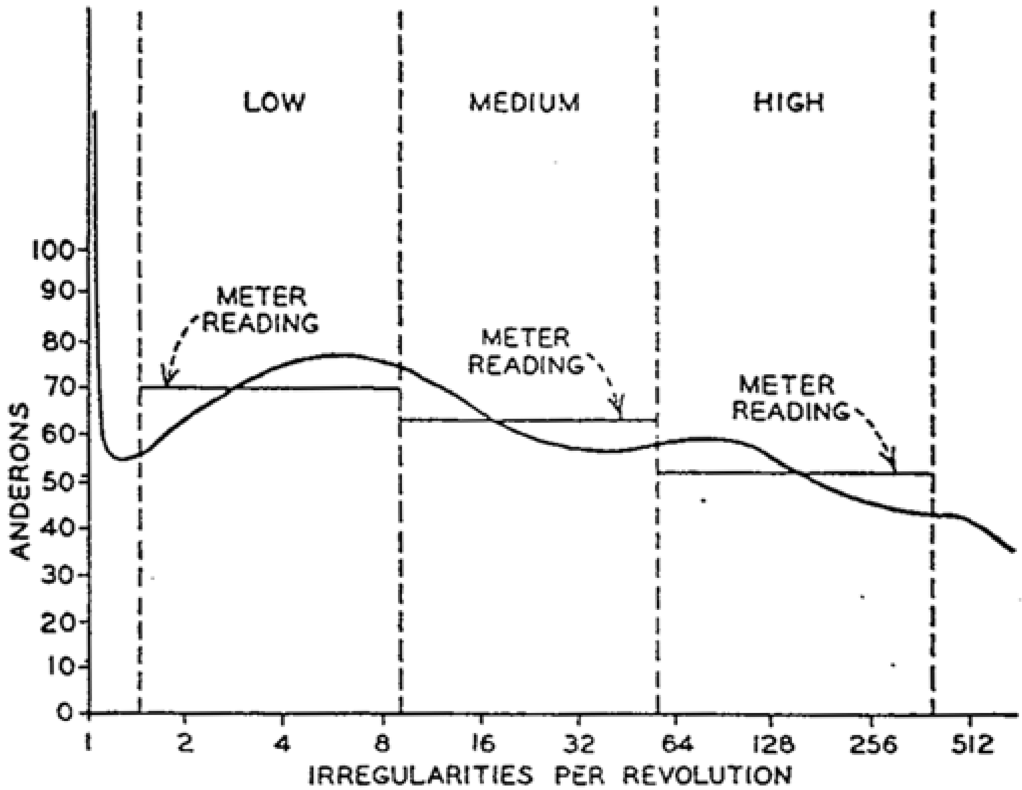


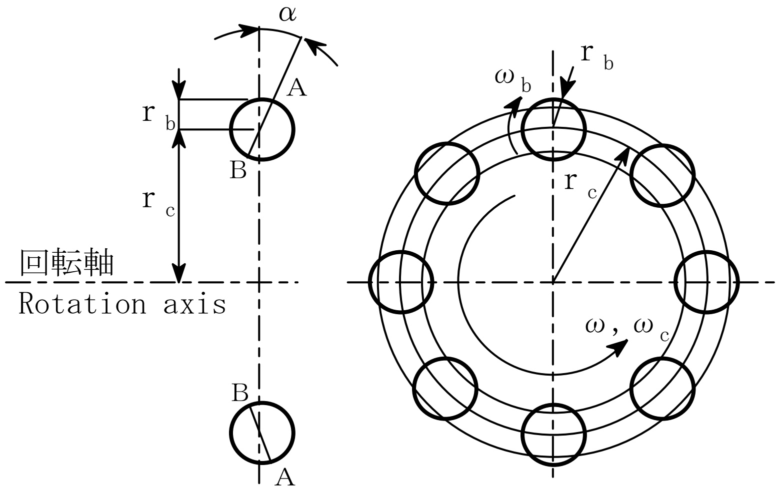
図２：チェイニーらの論文から引用したアンデロン振動のスペクトラムの例
Fig.2 : Anderon vibration spectrum quoted from Channay's group article

２．アンデロン振動モデル　Abdeon vibration model

２．１　ボールの自転と公転　Ball rotary and orbital motion

図３は，図１の状態で運転する玉軸受について，ボールの転動を表す量記号の定義を示す．
点Ａ，Ｂは，転動の軌道上にあるものとする．

Fig.3 shows the value symbol definitions in the case shown by Fig.1.
Point A and B are on the rolling race.



θ	：	内輪回転角度 Inner rotary angle
ω	：	内輪回転角速度 Inner rotary speed
ω_b	：	ボール自転速度 Ball rotary speed
ω_c	：	ボール公転速度 Ball orbital speed
α	：	接触角 Contact angle
r_b	：	ボール半径 Ball radious
r_c	：	転動半径 Ball orbital radious

図３：量記号の定義
Fig.3 : Value symbol definition

ボールの自転速度は，ボールの公転と同じ速度で回転する保持器から観測される速度とする．
保持器の上では，保持器は静止し，外輪は保持器と逆方向に ω_c で回転し，内輪は $\omega-\omega_c$ の速度で回転することになる．
ボール上の点Ａの速度は，外輪の接線方向速度と一致しなければならないから，次式を得る．

The ball rotary speed ω_b is on the cage rotating as same as ball orbital speed.
On this cage, the cage is stationary, the outer ring rotates at ω_c , and the inner ring rotates at $\omega-\omega_c$.
The point A speed of ball is same as the outer race tangent speed on the point A.

$$r_b \omega_b = (r_c + r_b \cos\alpha)\,\omega_c \qquad \cdots \quad (2)$$

ボール上の点Ｂの速度は，内輪の接線方向速度と一致しなければならないから，次式を得る．

The point B speed of ball is same as the inner race tangent speed on the point B.

$$r_b \omega_b = (r_c - r_b \cos\alpha)(\omega - \omega_c) \qquad \cdots \quad (3)$$

したがって，次の結果を得る．

Therefore, we get next result.

$$\omega_b = \frac{r_c^2 - r_b^2 \cos^2\alpha}{2 r_b r_c}\,\omega \qquad \cdots \quad (4)$$

$$\omega_c = \frac{r_c - r_b \cos\alpha}{2 r_c}\,\omega \qquad \cdots \quad (5)$$

ボールの自転角度 θ_b は，次式で得られる．

The ball rotary angle θ_b is as follows,

$$\theta_b = \frac{r_c^2 - r_b^2 \cos^2\alpha}{2 r_b r_c}\,\theta \qquad \cdots \quad (6)$$

Ｚ個中第ｚ番目のボールの位置角度 θ_z は，次式で得られる．

The number z of Z ball position angle θ_z is given as follows,

$$\theta_z = \frac{r_c - r_b \cos\alpha}{2 r_c}\,\theta + \frac{2\pi z}{Z} \qquad \cdots \quad (7)$$

２．２ 軸方向の力と接触剛性 Axial force and contact stiffness

図４は，第ｚ番目のボールが，軸方向の力 ｆ により，点Ａから点Ｂの方向に接触力 f_z を受ける状態を表す.

Fig.4 shows the contact force f_z of the number z ball in the derection of point A to B by the axial force f.

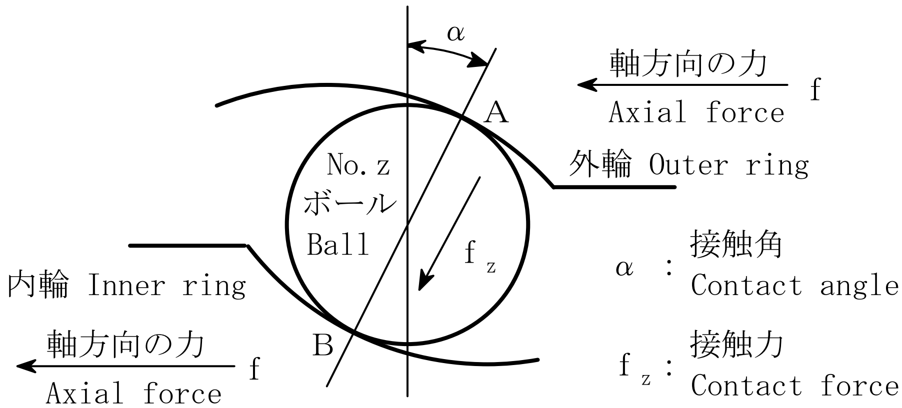


図 Fig. ４ ： 軸方向の力と接触力 Axial force and contact force

軸方向の力ｆは，Ｚ個のボールの各接触力 f_z により，次式で表される.

The axial force f is expressed by each contact force f_z as follows,

$$f = \sum_{z=0}^{Z-1} f_z \sin\alpha \qquad \cdots \quad (8)$$

図５は，ボールが平面と弾性接触し，接触点の近傍で，円形の面として接触する状態を表す.

Fig.5 shows the elastic contact between ball and flat plane with contact circle.

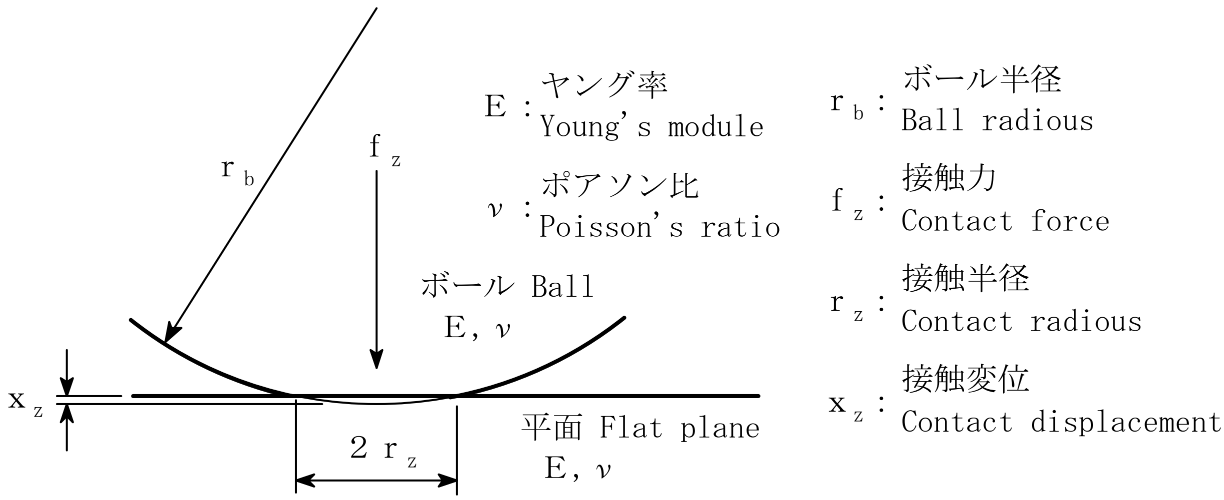


図 Fig. ５ ： ボールと平面の弾性接触 Elastic contact between ball and flat plane

図５の接触半径 r_z は，接触力 f_z によって，次式で表される.[2)]

The contact radious r_z is expressed by the contact force f_z as follows,[2)]

$$r_z = \sqrt[3]{\frac{3(1-\nu^2)\,r_b}{2E} f_z} \qquad \cdots \quad (9)$$

接触半径を除き，他の部分に変形が無いものと仮定して，次の関数 $f_z(x_z)$ を得る.

As no changing other parts shape, we get next result as the function $f_z(x_z)$.

$$f_z(x_z) = \frac{2E\sqrt{x_z^3(2r_b - x_z)^3}}{3(1-\nu^2)\,r_b} \qquad \cdots \quad (10)$$

このように，接触点の弾性変形として示される接触変位と接触力の関係を接触剛性と呼ぶ．
アンデロン振動の計算モデルにおいて，内輪，外輪，および，ボールは，接触点の接触剛性を除いて，剛体として振舞うものと仮定する．
図６に，直径φ２ｍｍのボールと平面について，材質がスチールである場合の接触剛性の特性を計算した結果を示す．

We call the relation between the contact displacement and force contact stiffness.
On the Andeon vibration calculation model, inner/outer race and balls are assumed as rigid bodies without the contact points.
Fig.6 shows the calculation result of the contact stiffness in the case of φ2 mm ball and flat plane of steel material.

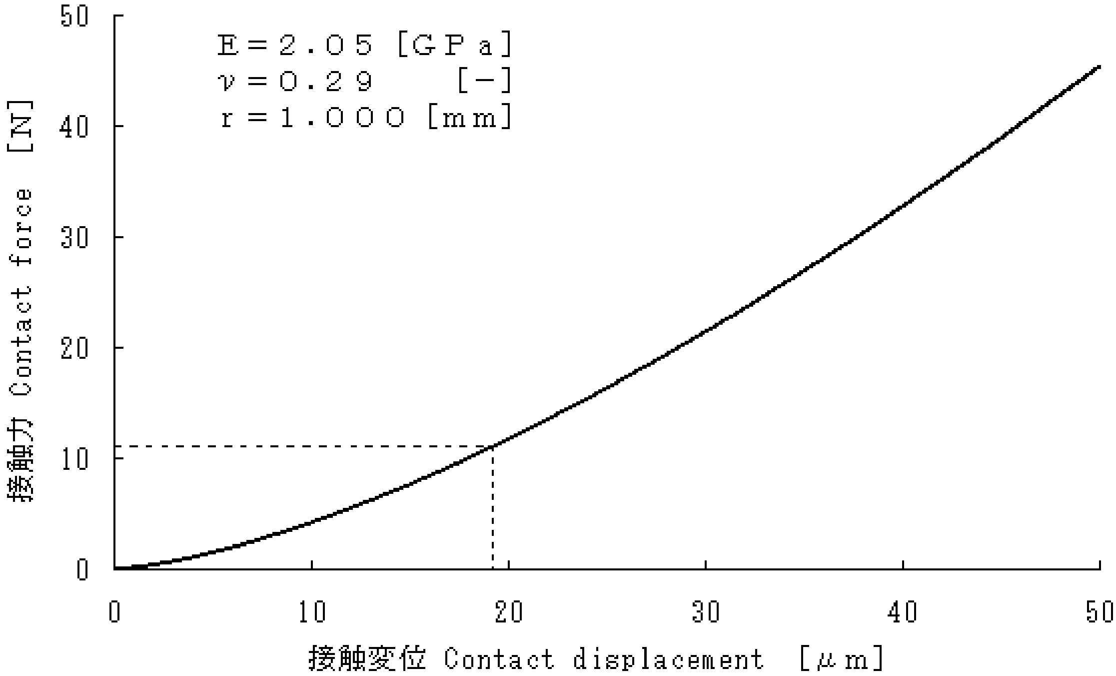


図６：直径φ２ｍｍのボールと平面におけるスチール材質の接触剛性
Fig.6 : Contact stiffness of φ2 mm ball and flat plane of steel

φ２ｍｍのスチールボールが７個で構成される玉軸受に，２０Ｎの軸方向の力が加わり，接触角が１５°となる場合，ボール１個に加えられる平均の接触力 f_{za} は，次の値となる．

About a bearing composed seven φ2 mm steel balls pressed 20 N axial force and made 15° of contact angle, the average contact force f_{za} is as follows,

$$f_{za} = \frac{f}{Z\sin\alpha} = \frac{20\,\mathrm{N}}{7\sin 15^\circ} = 11.039\,\mathrm{N} \quad \cdots \quad (11)$$

図６から，接触点では，約１９μｍの接触変位 x_{za} が生じると推測される．
内輪，および，外輪の軌道面は，平面でない．
それゆえ，図４の点Ａ，Ｂにおける接触剛性は，図６と同じではないが，類似の特性となる．
これらの接触剛性は，線形ではないが，平均値からの偏差において，線形化が可能である．

Applying this value to Fig.6, the contact displacement x_{za} shall be approx. 19 μm.
The inner/outer race are not flat plane.
Therefore the contact stiffness of A/B in Fig.4 are not same but similer to Fig.6.
These contact stiffness are not linear, but, they can be made linear as follows,

$$f_z(x_z) \fallingdotseq f_{za} + \frac{df_z}{dx_z}(x_z - x_{za})$$

$$f_z - f_{za} \fallingdotseq K\cdot(x_z - x_{za}), \quad K = \frac{df_z}{dx_z} \quad \cdots \quad (12)$$

アンデロン振動の計算モデルでは，内輪，外輪，および，ボールの理論形状からの偏差を論じるので，このような線形化が有効である．

The deviation from ideal shape of the inner/outer race and balls are dealt, then, thus linear model is effective.

２．３ 外輪の半径方向の変位 Outer ring radial displacement

点Ａ，および，Ｂを，外輪，および，内輪との接触点とするＺ個中第ｚ番目のボールについて，内輪，外輪，および，ボールの理論形状からの偏差を，それぞれ，w_i，w_o，および，w_{bz} とし，力 $f_z - f_{za}$ に関して，線形な接触剛性 K_A，および，K_B を仮定すると，外輪の変位について，図７のモデルを得る．

On the number z of Z ball which has the point A/B as the outer/inner race contact point, the deviation from ideal shape of the inner/outer race and ball w_i, w_o, and, w_{bz} and linear contact stffness K_A and K_B by the force $f_z - f_{za}$ makes the outer ring displacement model of Fig.7.

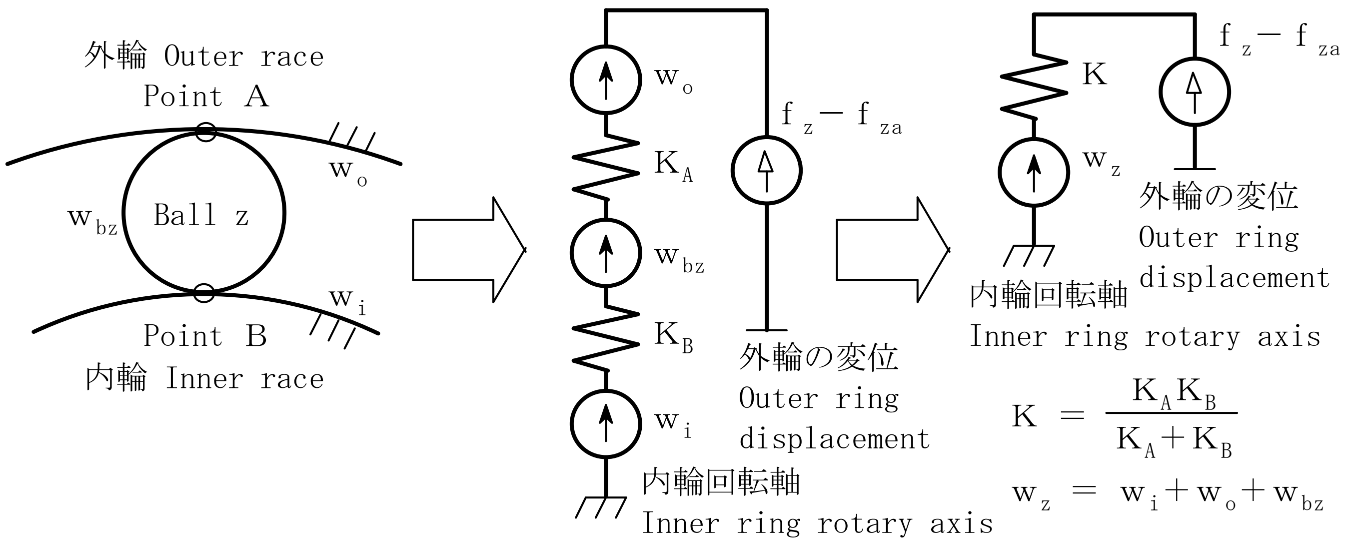


図７：理論形状からの偏差と線形な接触剛性による外輪変位のモデル
Fig.7 : Outer ring displacement model by linear contact stiffness

図８は，内輪回転軸を基準として，外輪が半径方向に生じる変位（ｘ，ｙ）と，Ｚ個中第ｚ番目の偏差 w_z，および，その線形接触剛性 Ｋ との関係を定義する．
図７のモデルは，接触力 f_z の方向に着目して述べたが，図８では，半径方向に対する接触角 α の影響が加えられている．

Fig.8 defines the relation among number z of Z deviation w_z, the linear stffness K, and the radial displacement (x, y) of the outer ring.
Fig.7 is dealt in the direction of the contact force f_z, and Fig.8 is added the effect of the contact angle α.

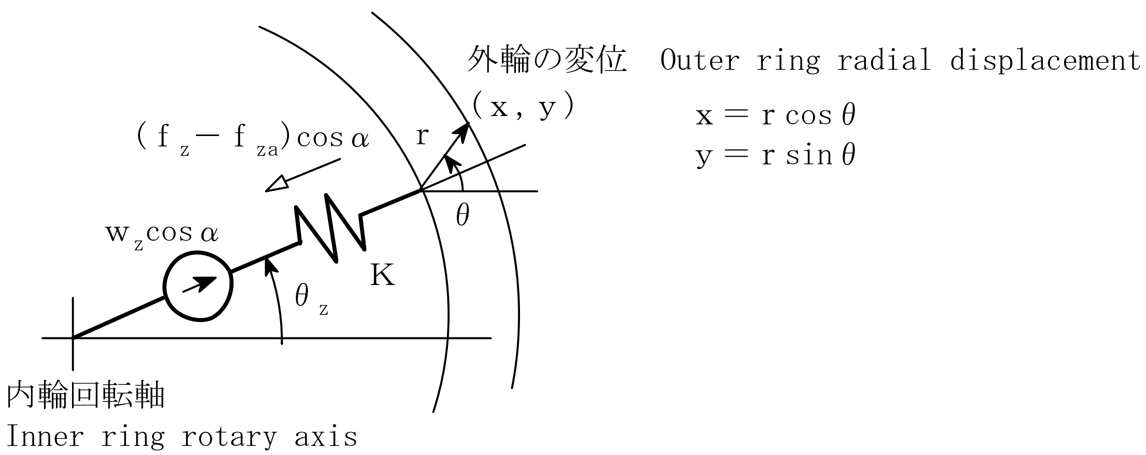


図８：外輪の半径方向の変位，Ｚ個中第ｚ番目の偏差，線形接触剛性の関係
Fig.8 : Outer ring radial displacement, number z deviation, linear stffness

図８において，次の関係が得られる．

Next relation is given by Fig.8.

$$
\begin{aligned}
(f_z - f_{za})\cos\alpha &= K\cdot(w_z\cos\alpha - r\cos(\theta-\theta_z)) \\
&= K\cdot(w_z\cos\alpha - r\cdot(\cos\theta\cos\theta_z - \sin\theta\sin\theta_z)) \\
&= K\cdot(w_z\cos\alpha - r\cos\theta\cos\theta_z - r\sin\theta\sin\theta_z) \\
&= K\cdot(w_z\cos\alpha - x\cos\theta_z - y\sin\theta_z) \qquad \cdots (13)
\end{aligned}
$$

この値のｘ方向の総和は，次の通りとなる．

The x direction sum total is as follows,

$$
\begin{aligned}
\sum_{z=0}^{Z-1}(f_z - f_{za})\cos\alpha\cos\theta_z &= \sum_{z=0}^{Z-1}K\cdot(w_z\cos\alpha - x\cos\theta_z - y\sin\theta_z)\cos\theta_z \\
&= K\cdot\left(\cos\alpha\sum_{z=0}^{Z-1}w_z\cos\theta_z - x\sum_{z=0}^{Z-1}\cos^2\theta_z - y\sum_{z=0}^{Z-1}\sin\theta_z\cos\theta_z\right) \qquad \cdots (14)
\end{aligned}
$$

外輪に加わる半径方向の力 f_z，および，f_{za} のｘ方向の総和は０である．ゆえに，式 14 の左辺の値は０である．

The x direction sum total of the radial direction of the force f_z and f_{za} are 0. Therefore, the formula 14 left side is 0.

$$\sum_{z=0}^{Z-1} f_z\cos\alpha\cos\theta_z = 0 \qquad \cdots (15)$$

$$\sum_{z=0}^{Z-1} f_{za}\cos\alpha\cos\theta_z = 0 \qquad \cdots (16)$$

$$\therefore \quad \sum_{z=0}^{Z-1}(f_z - f_{za})\cos\alpha\cos\theta_z = 0 \qquad \cdots (17)$$

式 14 の左辺の値は０であり，Ｋの値は０ではない．したがって，次式を得る．

The formula 14 left side is 0, and K is not 0. Therefore, we get next formula.

$$
\begin{aligned}
\cos\alpha\sum_{z=0}^{Z-1}w_z\cos\theta_z &= x\sum_{z=0}^{Z-1}\cos^2\theta_z + y\sum_{z=0}^{Z-1}\sin\theta_z\cos\theta_z \\
&= x\sum_{z=0}^{Z-1}\frac{1+\cos 2\theta_z}{2} + y\sum_{z=0}^{Z-1}\frac{\sin 2\theta_z}{2} \\
&= x\sum_{z=0}^{Z-1}\frac{1}{2} + x\sum_{z=0}^{Z-1}\frac{\cos 2\theta_z}{2} + y\sum_{z=0}^{Z-1}\frac{\sin 2\theta_z}{2} \\
&= x\frac{Z}{2} + x\sum_{z=0}^{Z-1}\frac{\cos 2\theta_z}{2} + y\sum_{z=0}^{Z-1}\frac{\sin 2\theta_z}{2} \qquad \cdots (18)
\end{aligned}
$$

３≦Ｚ の条件では，次式が成立する．

Next formula is correct in ３≦Ｚ.

$$\sum_{z=0}^{Z-1}\frac{\cos 2\theta_z}{2} \equiv 0, \quad \therefore\ x\sum_{z=0}^{Z-1}\frac{\cos 2\theta_z}{2} \equiv 0 \qquad \cdots (19)$$

$$\sum_{z=0}^{Z-1}\frac{\sin 2\theta_z}{2} \equiv 0, \quad \therefore\ y\sum_{z=0}^{Z-1}\frac{\sin 2\theta_z}{2} \equiv 0 \qquad \cdots (20)$$

したがって，次の結果を得る．

Therefore, we get next result.

$$x = \frac{2\cos\alpha}{Z}\sum_{z=0}^{Z-1}w_z\cos\theta_z \qquad \cdots (21)$$

同様にして，次の結果が得られる．

By similar procedure, we get next result.

$$y = \frac{2\cos\alpha}{Z}\sum_{z=0}^{Z-1}w_z\sin\theta_z \qquad \cdots (22)$$

２．４ 理論形状からの偏差 Deviation from ideal shape

内輪軌道の理論形状からの偏差 w_i は，内輪の回転中心から見た角度位置 θ における接触角方向の偏差として，回転中心に対する偏芯を含めて，次式で表される．

The deviation from ideal shape of the inner race is expressed using the rotary center angle θ and including the rotary eccentricity as follows,

$$w_i(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} W_{ik}\cos(k\theta+\phi_{ik}) \quad \cdots (23)$$

外輪軌道の理論形状からの偏差 w_o は，外輪の形状中心から見た角度位置 θ における接触角方向の偏差として，次式で表される．

The deviation from ideal shape of the outer race is expressed using the object center angle θ as follows,

$$w_o(\theta) = \sum_{k=2}^{\infty} W_{ok}\cos(k\theta+\phi_{ok}) \quad \cdots (24)$$

第ｚ番目のボールの理論形状からの半径偏差を w_{brz} とおくと，ボール中心からの角度位置 θ における転動円との偏差として，平均半径との偏差を含めて次式で表される．

The deviation from ideal shape as radious of number z ball w_{brz} is expressed using the object center angle θ and including the deviation from avegrae as follows,

$$w_{brz}(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} W_{bzk}\cos(k\theta+\phi_{bzk}) \quad \cdots (25)$$

外輪の変位を生じさせるボールの偏差は，点Ａから点Ｂまでの距離の偏差，すなわち，直径の偏差である．
第ｚ番目のボールの理論形状からの偏差とした w_{bz} は，直径の偏差であり，次式で表される．

The deviation of balls which generate the outer ring displacement is the deviation of the diameter as distance from A to B.
The deviation of number z ball w_{bz} is the diameter deviation as follows,

$$\begin{aligned}
w_{bz}(\theta) &= w_{brz}(\theta) + w_{brz}(\theta+\pi) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} W_{bzk}\cos(k\theta+\phi_{bzk}) + \sum_{k=0}^{\infty} W_{bzk}\cos(k(\theta+\pi)+\phi_{bzk}) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(W_{bzk}\cos(k\theta+\phi_{bzk}) + W_{bzk}\cos(k(\theta+\pi)+\phi_{bzk})\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} W_{bzk}\left(\cos(k\theta+\phi_{bzk}) + \cos(k(\theta+\pi)+\phi_{bzk})\right) \\
&= 2\sum_{k=0}^{\infty} W_{bz2k}\cos(2k\theta+\phi_{bz2k}) \quad \cdots (26)
\end{aligned}$$

$$\because \quad \cos(k(\theta+\pi)+\phi) = \begin{cases} \cos(k\theta+\phi) & \text{at } k=0,2,4,,, \\ -\cos(k\theta+\phi) & \text{at } k=1,3,5,,, \end{cases}$$

したがって，第ｚ番目の位置における理論形状からの偏差の総和 w_z は，次式で表される．

Therefore, the number z total deviation w_z is expressed as follows,

$$w_z = w_i(\theta_z-\theta) + w_o(\theta_z) + w_{bz}(\theta_b) \quad \cdots (27)$$

２．５ 外輪変位の計算 Outer ring displacement calculation

式 21，および，式 27 から，次式を得る． From the formula 21 and 27,

$$x = \frac{2\cos\alpha}{Z}\sum_{z=0}^{Z-1}\left(w_i(\theta_z-\theta)+w_o(\theta_z)+w_{bz}(\theta_b)\right)\cos\theta_z \quad \cdots (28)$$

これに式 23，24，26 を代入し，次式を得る． Substituting the formula 23, 24, and 26,

$$x = \frac{2\cos\alpha}{Z}\sum_{z=0}^{Z-1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}W_{ik}\cos(k(\theta_z-\theta)+\phi_{ik})+\sum_{k=2}^{\infty}W_{ok}\cos(k\theta_z+\phi_{ok})+2\sum_{k=0}^{\infty}W_{bz2k}\cos(2k\theta_b+\phi_{bz2k})\right)\cos\theta_z$$

$$= \frac{2\cos\alpha}{Z}\sum_{z=0}^{Z-1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}W_{ik}\cos(k(\theta_z-\theta)+\phi_{ik})\right)\cos\theta_z$$

$$+ \frac{2\cos\alpha}{Z}\sum_{z=0}^{Z-1}\left(\sum_{k=2}^{\infty}W_{ok}\cos(k\theta_z+\phi_{ok})\right)\cos\theta_z$$

$$+ \frac{2\cos\alpha}{Z}\sum_{z=0}^{Z-1}\left(2\sum_{k=0}^{\infty}W_{bz2k}\cos(2k\theta_b+\phi_{bz2k})\right)\cos\theta_z \quad \cdots (29)$$

和の順序を入れ替えて，次式を得る． Changing the sum operation order,

$$x = \cos\alpha\sum_{k=1}^{\infty}\left(W_{ik}\frac{2}{Z}\sum_{z=0}^{Z-1}\cos(k(\theta_z-\theta)+\phi_{ik})\cos\theta_z\right)$$

$$+ \cos\alpha\sum_{K=2}^{\infty}\left(W_{ok}\frac{2}{Z}\sum_{z=0}^{Z-1}\cos(k\theta_z+\phi_{ok})\cdot\cos\theta_z\right)$$

$$+ \cos\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{4}{Z}\sum_{z=0}^{Z-1}W_{bz2k}\cdot\cos(2k\theta_b+\phi_{bz2k})\cdot\cos\theta_z\right) \quad \cdots (30)$$

内輪，外輪，および，ボールの理論形状からの偏差は，それぞれ，独立に外輪の変位に影響を及ぼすことが，式 30 で示された．
内輪の偏差による外輪の変位 x_i，外輪の偏差による外輪の変位 x_o， ボールの偏差による外輪の変位 x_b を用いて，次式を得る．

The formula 30 shows the deviations of inner/outer race and balls influence the displacement independently each other.
The displacement by inner race deviation x_i, outer race deviation x_o, and ball deviation x_b make next formula,

$$x = (x_i+x_o+x_b)\cos\alpha \quad \cdots (31)$$

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty}\left(W_{ik}\frac{2}{Z}\sum_{z=0}^{Z-1}\cos(k(\theta_z-\theta)+\phi_{ik})\cos\theta_z\right)$$

$$x_o = \sum_{K=2}^{\infty}\left(W_{ok}\frac{2}{Z}\sum_{z=0}^{Z-1}\cos(k\theta_z+\phi_{ok})\cdot\cos\theta_z\right)$$

$$x_b = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{4}{Z}\sum_{z=0}^{Z-1}W_{bz2k}\cdot\cos(2k\theta_b+\phi_{bz2k})\cdot\cos\theta_z\right)$$

２．６ 内輪の偏差による変位 Displacement by inner race deviation

内輪の偏差による変位 x_i は，次式となる．

The displacement by inner race deviation,

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty}\left(W_{ik}\frac{2}{Z}\sum_{z=0}^{Z-1}\cos(k(\theta_z-\theta)+\phi_{ik})\cos\theta_z\right) \quad \cdots \quad (32)$$

三角関数の公式により，次の計算を得る．

By the trigonometric function formula,

$$\cos(k(\theta_z-\theta)+\phi_{ik})\cos\theta_z = \frac{\cos(k(\theta_z-\theta)+\phi_{ik}+\theta_z)}{2}+\frac{\cos(k(\theta_z-\theta)+\phi_{ik}-\theta_z)}{2}$$

$$=\frac{\cos((k+1)\theta_z-k\theta+\phi_{ik})}{2}+\frac{\cos((k-1)\theta_z-k\theta+\phi_{ik})}{2}$$

$$(k+1)\theta_z-k\theta+\phi_{ik} = (k+1)\left(\frac{r_c-r_b\cos\alpha}{2r_c}\theta+\frac{2\pi z}{Z}\right)-k\theta+\phi_{ik}$$

$$=\frac{(k+1)(r_c-r_b\cos\alpha)-2kr_c}{2r_c}\theta+(k+1)\frac{2\pi z}{Z}+\phi_{ik}$$

$$=-\frac{(k-1)r_c+(k+1)r_b\cos\alpha}{2r_c}\theta+\phi_{ik}+2\pi\frac{k+1}{Z}z$$

$$(k-1)\theta_z-k\theta+\phi_{ik} = (k-1)\left(\frac{r_c-r_b\cos\alpha}{2r_c}\theta+\frac{2\pi z}{Z}\right)-k\theta+\phi_{ik}$$

$$=\frac{(k-1)(r_c-r_b\cos\alpha)-2kr_c}{2r_c}\theta+(k-1)\frac{2\pi z}{Z}+\phi_{ik}$$

$$=-\frac{(k+1)r_c+(k-1)r_b\cos\alpha}{2r_c}\theta+\phi_{ik}+2\pi\frac{k-1}{Z}z$$

$$\sum_{z=0}^{Z-1}\cos(k(\theta_z-\theta)+\phi_{ik})\cos\theta_z = \begin{cases} 0\ , & k\neq 1 \text{ and } k\neq nZ\pm 1 \\ \dfrac{Z}{2}\cos(\theta-\phi_{i1})\ , & k=1 \\ \dfrac{Z}{2}\cos\left(\left(nZ\dfrac{r_c+r_b\cos\alpha}{2r_c}\pm 1\right)\theta-\phi_{ik}\right)\ , & k=nZ\pm 1 \end{cases}$$

したがって，次の結果を得る．

Therefore, we get next result.

$$x_i = W_{i1}\cos(\theta-\phi_{i1}) + \sum_{n=1}^{\infty}W_{i(nZ\pm1)}\cos(I_{nZ\pm1}\theta-\phi_{i(nZ\pm1)}) \quad \cdots \quad (33)$$

$$I_{nZ\pm1} = nZ\frac{r_c+r_b\cos\alpha}{2r_c} \pm 1$$

この結果は，x_i に２θ の成分を含まないことを示している．
経験的には，アンデロン振動に ２θ の成分が含まれることが知られている．

This result shows that x_i does not have the ２θ element.
Empirically, it is known that the Anderon vibration includes the ２θ element.

そこで，これまでの説明には含まれない傾斜を，内輪軌道の偏差の概念に加えることとする．
内輪軌道の回転軸に対する傾斜は，内輪の回転にしたがって，軸受全体を揺らす．
内輪軌道の軸と回転軸のなす角を β とし，内輪の１回転で生じる外輪の変位を図９に示す．

Therefore, we newly append the slant to the inner race deviation concept.
The inner race slant against the rotary axis shakes the whole rotating bearing.
Fig.9 shows the outer displacement made by the inner slant β in one revolution.

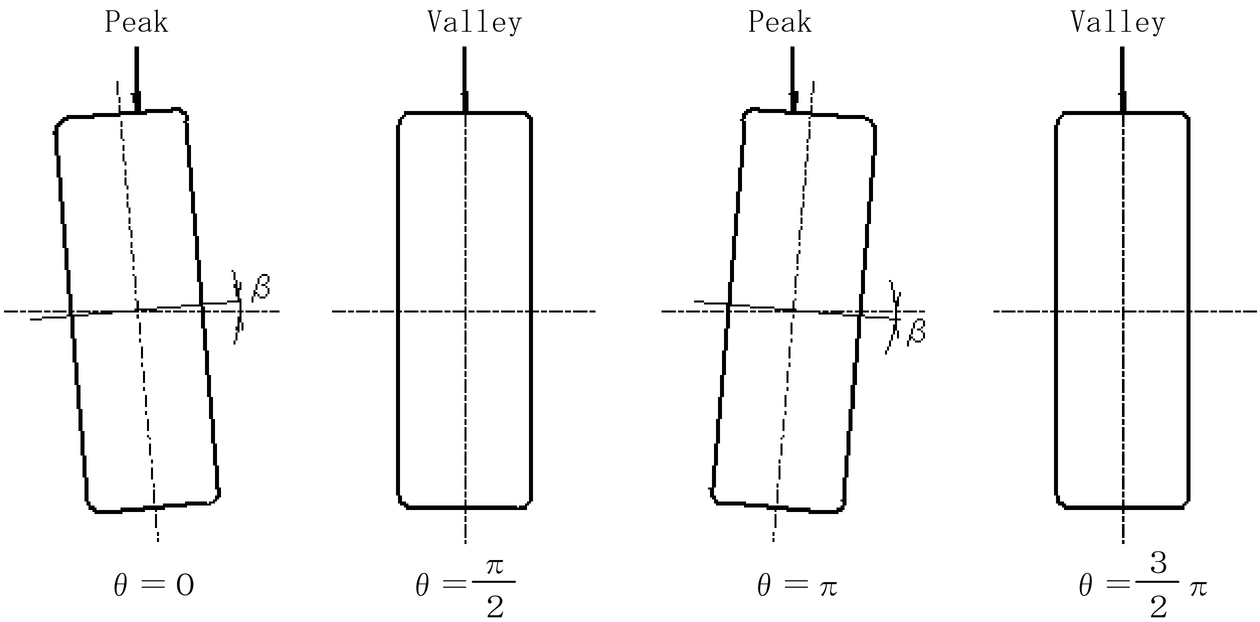
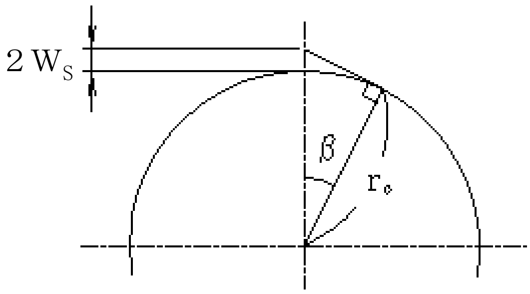


図９：内輪軌道の傾斜 β によって生じる，１回転中の外輪の半径方向の変位
Fig.9 : Outer ring radial displacement by inner slant β in one revolution

図９で示すように，内輪軌道の傾斜によって生じる変位は，１回点で２回の振動となる．
図 10 は，この振動の両側振幅を $2W_S$ とし，その大きさを求めるための作図である．

The displacement driven by the inner race slant has 2 waves per revolution.
Fig.10 shows the drawing for getting the outer ring displacement magnitude $2W_S$.



r_o : 外輪の半径
Outer ring radious

図10：内輪軌道の傾斜 β によって生じる外輪の変位の振幅を求める作図
Fig.10 : Drawing for outer ring displacement magnitude by inner slant β

図 10 から，次の結果を得る．

We get next result by Fig.10.

$$W_S = \frac{1}{2}\left(\frac{r_o}{\cos\beta} - r_o\right) = r_o\frac{1-\cos\beta}{2\cos\beta} \quad \cdots (34)$$

したがって，次の結果を得る．

Then, we get next result.

$$\begin{aligned} x_i &= W_{i1}\cos(\theta-\phi_{i1}) + W_S\cos(2\theta-\phi_S) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} W_{i(nZ\pm1)}\cos(I_{nZ\pm1}\theta-\phi_{i(nZ\pm1)}) \quad \cdots (35) \end{aligned}$$

２．７ 外輪の偏差による変位　Displacement by outer race deviation

外輪の偏差による変位 x_o は，次式となる．　　　The displacement by outer race deviation,

$$x_o = \sum_{k=2}^{\infty}\left(W_{ok}\frac{2}{Z}\sum_{z=0}^{Z-1}\cos(k\,\theta_z+\phi_{ok})\cos\theta_z\right) \quad \cdots (36)$$

三角関数の公式により，次の計算を得る．　　　By the trigonometric function formula,

$$\cos(k\,\theta_z+\phi_{ok})\cos\theta_z = \frac{\cos(k\,\theta_z+\phi_{ok}+\theta_z)}{2}+\frac{\cos(k\,\theta_z+\phi_{ok}-\theta_z)}{2}$$

$$= \frac{\cos((k+1)\,\theta_z+\phi_{ok})}{2}+\frac{\cos((k-1)\,\theta_z+\phi_{ok})}{2}$$

$$(k+1)\,\theta_z+\phi_{ok} = (k+1)\left(\frac{r_c-r_b\cos\alpha}{2\,r_c}\theta+\frac{2\,\pi\,z}{Z}\right)+\phi_{ok}$$

$$= (k+1)\frac{r_c-r_b\cos\alpha}{2\,r_c}\theta+(k+1)\frac{2\,\pi\,z}{Z}+\phi_{ok}$$

$$= (k+1)\frac{r_c-r_b\cos\alpha}{2\,r_c}\theta+\phi_{ok}+2\,\pi\frac{k+1}{Z}z$$

$$(k-1)\,\theta_z+\phi_{ok} = (k-1)\left(\frac{r_c-r_b\cos\alpha}{2\,r_c}\theta+\frac{2\,\pi\,z}{Z}\right)+\phi_{ok}$$

$$= (k-1)\frac{r_c-r_b\cos\alpha}{2\,r_c}\theta+(k-1)\frac{2\,\pi\,z}{Z}+\phi_{ok}$$

$$= (k-1)\frac{r_c-r_b\cos\alpha}{2\,r_c}\theta+\phi_{ok}+2\,\pi\frac{k-1}{Z}z$$

$$\sum_{z=0}^{Z-1}\cos(k\,\theta_z+\phi_{ok})\cos\theta_z = \begin{cases} 0\ , & k\neq nZ\pm 1 \\ \dfrac{Z}{2}\cos\left(nZ\dfrac{r_c-r_b\cos\alpha}{2\,r_c}\theta+\phi_{ok}\right), & k=nZ\pm 1 \end{cases}$$

したがって，次の結果を得る．　　　Therefore, we get next result.

$$x_o = \sum_{n=1}^{\infty}\left(W_{o(nZ-1)}\cos(O_{nZ}\theta+\phi_{o(nZ-1)})+W_{o(nZ+1)}\cos(O_{nZ}\theta+\phi_{o(nZ+1)})\right) \quad \cdots (37)$$

$$O_{nZ} = nZ\frac{r_c-r_b\cos\alpha}{2\,r_c}$$

この結果から，外輪軌道の $nZ-1$，および，$nZ+1$ の異なる２つのうねり成分が，共通な $O_{nZ}\theta$ の成分を生むことが判る．

This result shows that the different two element of $nZ-1$ and $nZ+1$ waviness generates the common $O_{nZ}\theta$ elemant.

２．８ ボールの偏差による変位 Displacement by balls deviation

ボールの偏差による変位 x_b は，次式となる． The displacement by balls deviation,

$$x_b = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{4}{Z}\sum_{z=0}^{Z-1} W_{bz2k}\cdot\cos(2k\theta_b+\phi_{bz2k})\cdot\cos\theta_z\right) \quad \cdots (38)$$

三角関数の公式により，次の計算を得る． By the trigonometric function formula,

$$\cos(2k\theta_b+\phi_{bz2k})\cos\theta_z = \frac{\cos(2k\theta_b+\phi_{bz2k}+\theta_z)}{2} + \frac{\cos(2k\theta_b+\phi_{bz2k}-\theta_z)}{2}$$

$$2k\theta_b+\phi_{bz2k}+\theta_z = 2k\frac{r_c^2-r_b^2\cos^2\alpha}{2r_br_c}\theta+\phi_{bz2k}+\frac{r_c-r_b\cos\alpha}{2r_c}\theta+\frac{2\pi z}{Z}$$

$$= \left(2k\frac{r_c^2-r_b^2\cos^2\alpha}{2r_br_c}+\frac{r_c-r_b\cos\alpha}{2r_c}\right)\theta+\phi_{bz2k}+\frac{2\pi z}{Z}$$

$$2k\theta_b+\phi_{bz2k}-\theta_z = 2k\frac{r_c^2-r_b^2\cos^2\alpha}{2r_br_c}\theta+\phi_{bz2k}-\frac{r_c-r_b\cos\alpha}{2r_c}\theta-\frac{2\pi z}{Z}$$

$$= \left(2k\frac{r_c^2-r_b^2\cos^2\alpha}{2r_br_c}-\frac{r_c-r_b\cos\alpha}{2r_c}\right)\theta+\phi_{bz2k}-\frac{2\pi z}{Z}$$

したがって，次の結果を得る． Therefore, we get next result.

$$x_b = \frac{2}{Z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{z=0}^{Z-1}W_{bz2n}\cos\left(B_{An}\theta+\phi_{bz2n}+\frac{2\pi z}{Z}\right)\right)$$

$$+\frac{2}{Z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{z=0}^{Z-1}W_{bz2n}\cos\left(B_{Bn}\theta+\phi_{bz2n}-\frac{2\pi z}{Z}\right)\right) \quad \cdots (39)$$

$$B_{An} = 2n\frac{r_c^2-r_b^2\cos^2\alpha}{2r_br_c}+\frac{r_c-r_b\cos\alpha}{2r_c}$$

$$B_{Bn} = 2n\frac{r_c^2-r_b^2\cos^2\alpha}{2r_br_c}-\frac{r_c-r_b\cos\alpha}{2r_c}$$

この結果から，ボールの ２ｎ のうねり成分が，$B_{An}\theta$ ，および，$B_{Bn}\theta$ の異なる２つの成分を生むことが判る．
Ｚ個のボールは，それぞれが，外輪変位の成分を独立に生成させる．
ボールの ｎ＝０ 成分は，Ｚ個のボールの平均半径と，各々のボールとの半径の差である．
B_{A0} ，および，B_{B0} は，次の通りとなる．

This result shows that the ball waviness element of ２ｎ generates two different vibration elements of $B_{An}\theta$ and $B_{Bn}\theta$. Each ball of the Ｚ generates the outer displacement element independently. ｎ＝０ element of ball waviness means the radius difference to Ｚ pieces average. B_{A0} and B_{B0} are as follows,

$$B_{A0} = -B_{B0} = \frac{r_c-r_b\cos\alpha}{2r_c} \quad \cdots (40)$$

２．９ アンデロン振動モデルの要約　Anderon vibration model summary

以上から，アンデロン振動の変位は，内輪回転角度の関数 ｘ（θ）として，次式で表される．

Then, the Anderon vibration displacement shown the rotary angle function ｘ（θ）.

$$x(\theta) = \Big(x_i(\theta) + x_o(\theta) + x_b(\theta)\Big)\cos\alpha \qquad \cdots (41)$$

$$x_i(\theta) = W_{i1}\cos\Big(\theta - \phi_{i1}\Big) + W_S\cos\Big(2\theta - \phi_S\Big) + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(W_{i(nZ\pm1)}\cos\Big(I_{nZ\pm1}\theta - \phi_{i(nZ\pm1)}\Big)\Big)$$

$$x_o(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(W_{o(nZ-1)}\cos\Big(O_{nZ}\theta + \phi_{o(nZ-1)}\Big) + W_{o(nZ+1)}\cos\Big(O_{nZ}\theta + \phi_{o(nZ+1)}\Big)\Big)$$

$$x_b(\theta) = \frac{2}{Z}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{z=0}^{Z-1}W_{bz2n}\cos\Big(B_{An}\theta + \phi_{bz2n} + \frac{2\pi z}{Z}\Big) + \sum_{z=0}^{Z-1}W_{bz2n}\cos\Big(B_{Bn}\theta + \phi_{bz2n} - \frac{2\pi z}{Z}\Big)\Big)$$

θ ： 内輪の回転角度 Inner ring rotary angle,

α ： ボールの接触角 Ball contact angle,

Z ： ボールの総数 Ball quantity

d_b ： ボールの直径 Ball diameter,

d_c ： ボールの公転径 Ball orbital diameter

W_{ik} ： 内輪のうねり変位第ｋ波成分の振幅 Inner race waviness displacement k wave element amplitude

ϕ_{ik} ： 内輪のうねり変位第ｋ波成分の位相 Inner race waviness displacement k wave element phase

W_S ： 内輪の端面と軌道面の平行度の偏差による成分の振幅 Amplitude of parallel deviation of inner ring edge and race element

ϕ_S ： 内輪の端面と軌道面の平行度の偏差による成分の位相 Phase of parallel deviation of inner ring edge and race element

$$I_{nZ\pm1} = nZ\frac{d_c + d_b\cos\alpha}{2d_c} \pm 1$$

W_{ok} ： 外輪のうねり変位第ｋ波成分の振幅 Outer race waviness displacement k wave element amplitude

ϕ_{ok} ： 外輪のうねり変位第ｋ波成分の位相 Outer race waviness displacement k wave element phase

$$O_{nZ} = nZ\frac{d_c - d_b\cos\alpha}{2d_c}$$

W_{bzk} ： 第ｚ番目のボールのうねり変位第ｋ波成分の振幅 Number z ball waviness displacement k wave element amplitude

ϕ_{bzk} ： 第ｚ番目のボールのうねり変位第ｋ波成分の位相 Number z ball waviness displacement k wave element phase

$$B_{An} = 2n\frac{d_c^2 - d_b^2\cos^2\alpha}{2d_bd_c} + \frac{d_c - d_b\cos\alpha}{2d_c}, \qquad B_{A0} = \frac{d_c - d_b\cos\alpha}{2d_c}$$

$$B_{Bn} = 2n\frac{d_c^2 - d_b^2\cos^2\alpha}{2d_bd_c} - \frac{d_c - d_b\cos\alpha}{2d_c}, \qquad B_{B0} = -B_{A0}$$

アンデロン振動の変位密度 v（θ）は，次式で得られる．

Anderon vibration displacement density v（θ）is given as follows,

$$
\begin{aligned}
v(\theta) &= \frac{dx}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\Big(x_i(\theta)+x_o(\theta)+x_b(\theta)\Big)\cos\alpha \\
&= \left(\frac{dx_i}{d\theta}(\theta)+\frac{dx_o}{d\theta}(\theta)+\frac{dx_b}{d\theta}(\theta)\right)\cos\alpha \\
&= \Big(v_i(\theta)+v_o(\theta)+v_b(\theta)\Big)\cos\alpha \qquad \cdots (42)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_i(\theta) &= -W_{i1}\sin\Big(\theta-\phi_{i1}\Big)-2W_S\sin\Big(2\theta-\phi_S\Big) \\
&\quad -\sum_{n=1}^{\infty} I_{nZ\pm1}W_{i(nZ\pm1)}\sin\Big(I_{nZ\pm1}\theta-\phi_{i(nZ\pm1)}\Big)
\end{aligned}
$$

$$
v_o(\theta) = -\sum_{n=1}^{\infty} O_{nZ}\Big(W_{o(nZ-1)}\sin\Big(O_{nZ}\theta+\phi_{o(nZ-1)}\Big)+W_{o(nZ+1)}\sin\Big(O_{nZ}\theta+\phi_{o(nZ+1)}\Big)\Big)
$$

$$
\begin{aligned}
v_b(\theta) &= -\frac{2}{Z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(B_{An}\sum_{z=0}^{Z-1}W_{bz2n}\sin\left(B_{An}\theta+\phi_{bz2n}+\frac{2\pi z}{Z}\right)\right) \\
&\quad -\frac{2}{Z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(B_{Bn}\sum_{z=0}^{Z-1}W_{bz2n}\sin\left(B_{Bn}\theta+\phi_{bz2n}-\frac{2\pi z}{Z}\right)\right)
\end{aligned}
$$

このモデルの条件は，次の通りである．

1）内輪が回転し，軸方向の力を受けて外輪が静止する玉軸受において，外輪の半径方向の振動は，内輪回転角度の関数である．

2）ボールの自転と公転は，理論形状から計算される運動を維持する．

3）内輪，外輪，および，ボールは，接触点で弾性接触するが，それ以外は，剛体として振舞う．

4）接触点における力の釣り合いから，外輪の半径方向の位置を求める静的モデルである．

5）潤滑油，および，保持器については，その効果を無視している．

This model conditions are as follows,

The radial vibration of a ball bearing as rotating inner ring and stationary outer ring is an inner rotary angle function.

The balls rolling is kept as the motions calculated by the ideal shapes.

The inner/outer ring and balls have rigid bodies without the elastic contact points each other.

This is a static model by using the force balance at the contact points.

The effects of the lubricant and the cage are omitted in this model.

このモデルの特徴は，次の通りである．

1）内輪，外輪，および，ボールのうねり形状から，アンデロン振動の波形を直接計算で得ることができる．

2）ボール径，ボール公転径，ボール数，および，接触角が，主要パラメータである．

3）軸方向の力，および，接触剛性は，計算式に含まれない．

This model features are as follows,

The Anderon vibration waveform can be calculated directly by the wavinesses of inner/outer race and balls.

The ball diameter, orbital diameter, Z, and contact angle are the main parameter.

The axial force and the contact stiffness value are not included in the formula.

３．アンデロン振動の挙動　Anderon vibration behavior

３．１　計算モデルの挙動　Calculation model behavior

表１に示す諸元の玉軸受６０８を，計算モデルに適用し，その挙動を調べる.

We research the model behavior applied the 608 bearing of Tab.1 parameters.

表１：アンデロン振動の計算モデルに適用した玉軸受６０８の諸元
Tab.1 : The parameter of 608 bearing for the model calculation

型式 Type	ボール径 Ball diameter ｍｍ	公転径 Orbital diameter ｍｍ	ボール数 Ｚ Ball quantity ――	接触角 Contact angle ｄｅｇ
６０８	３．９６８８	１５	７	１０

理論形状からの偏差は，次式で与える.

The given deviations are as follows,

$$W_{i1} = 2.5\ \mu m \quad \cdots (43)$$

$$W_{S} = 0.05\ \mu m \quad \cdots (44)$$

$$W_{ik} = \frac{0.1\ \mu m}{k^{1.5}}, \text{ at } 2 \leqq k < 800 \quad \cdots (45)$$

$$W_{ok} = \frac{0.1\ \mu m}{k^{1.5}}, \text{ at } 2 \leqq k < 1360 \quad \cdots (46)$$

$$W_{b0k} = \frac{0.1\ \mu m}{k^{1.5}}, \text{ at } 2 \leqq k < 287 \quad \cdots (47)$$

位相 ϕ_{i0} ，ϕ_{S} ，および，ϕ_{b00} は，０とし，ϕ_{ik} ，ϕ_{ok} ，および，ϕ_{bzk} は，乱数によって与える.
これらの条件を式 42 に適用し，内輪回転角度の関数として得られる外輪の変位密度の波形を図 11 に示す.

The phase ϕ_{i0} , ϕ_{S} , and ϕ_{b00} are set to 0, and ϕ_{ik} , ϕ_{ok} , and ϕ_{bzk} are set by random numbers.
Fig.11 shows the waveform calculation result for 608 bearing of above waviness conditions.

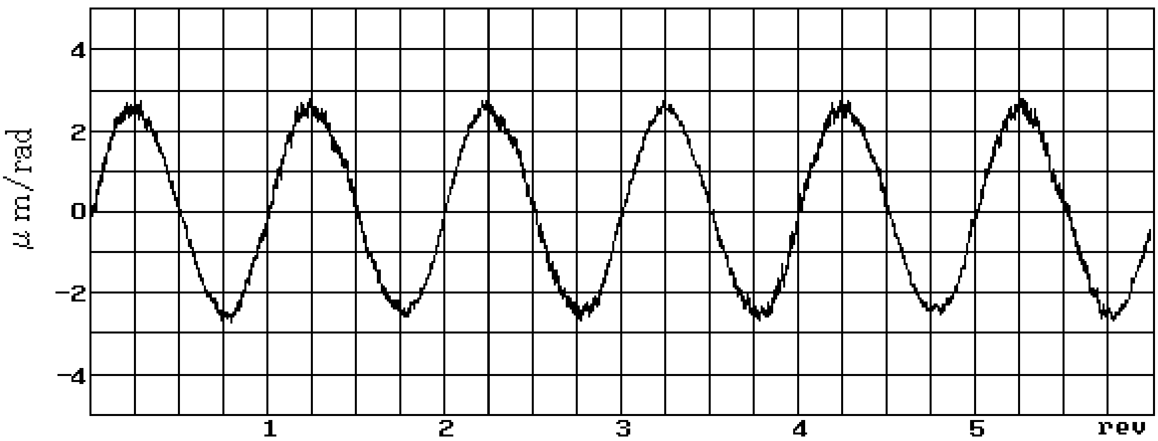


図 11：玉軸受６０８に適当なうねりを適用したアンデロン振動の波形計算
Fig.11 : Waveform calculation for 608 bearing with the appropriate wavinesses

この波形では，内輪の偏芯 ２．５μｍ による１回転に１回の ２．５μｍ/rad の振動が顕著であるが，その他は判別が困難である.
この波形をフーリエ変換し，Anderon で縦軸を目盛ったスペクトラムを，図 12 に示す.

In this waveform, the 2.5 μm/rad of 1 time/rev made from 2.5 μm eccentricity is featured, the others are not clear.
Fig.12 shows the Anderon spectrum made by Fourier transform from this waveform.

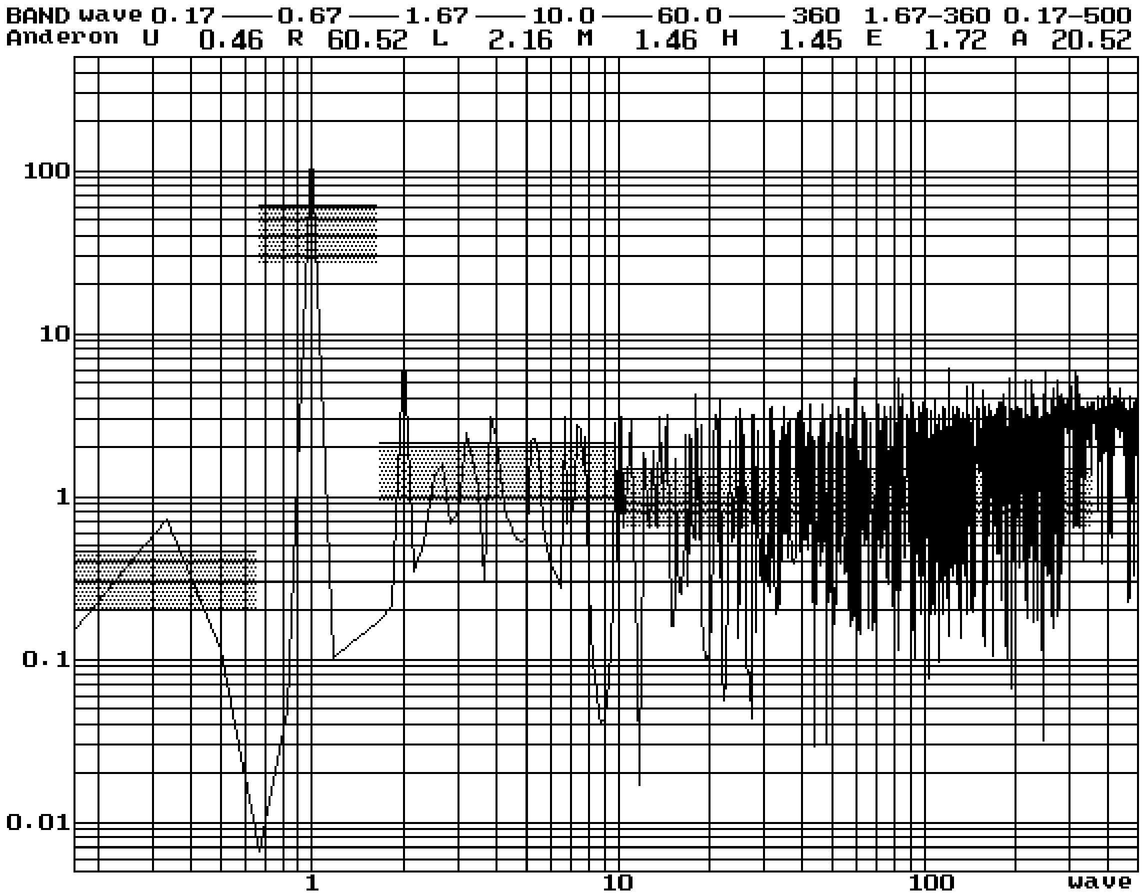


図 12：玉軸受６０８に適当なうねりを適用したアンデロン振動のスペクトラム計算
Fig. 12: Spectrum calculation for 608 bearing with the appropriate wavinesses

図 12 は，先に引用した図２と比較されるべき図であり，縦軸，および，横軸は，両者で同じ単位を使用している．
図 12 で用いる横軸の単位 wave は，図２の横軸の単位 IRREGULARITIES PER REV と同じ意味であり，図 12 では 1 wave 以下までが，表示されている．
図 12 は，多数の離散スペクトラムで構成されていて，これは，式 41，および，42 で示される結果を表している．
したがって，このアンデロン振動の計算モデルは，図２が示す連続スペクトルを生成するものとはならない．
図２が示すアンデロン値は，次の通りである．

Fig.12 is the figure to be compared with Fig.2, and the vertical/horizontal axis units are same in both figures.
The horizontal axis unit wave in Fig.12 has same mean as horizontal axis the unit IRREGULARITIES PER REV in Fig.2, and in Fig.12 it is showen under 1 wave.
The shape in Fig.12 is composed of many discrete spectra, and it shows the result of the formula 41 and 42.
Therefore, this Andeon vibration model is not to generate continuous spectrum shown in Fig.2.
Anderon values in Fig.2 are as follows,

L band : 70 Anderon, M band 63 Anderon, H band 52 Anderon

図 12 が示すアンデロン値は，次の通りである．

Anderon values in Fig.12 are as follows,

L band : 2.16 Anderon, M band 1.46 Anderon, H band 1.45 Anderon

内輪，外輪，および，ボールのうねりは，L，M，および，H band が同じ値を示すことを意図して設定したが，内輪軌道の傾斜の値を加えることによって，L band が高くなる結果となった．
アンデロン振動の挙動は，内輪，外輪，および，ボールの偏差ごとに論じることができる．

The inner/outer race and balls waviness values are set to make same L, M, and H band values, but the L band value became larger than oters by adding inner slant.
The Anderon vibration behavior can be dealt by inner/outer and ball deviation.

３．２ 内輪偏差による挙動　Inner race deviation behavior

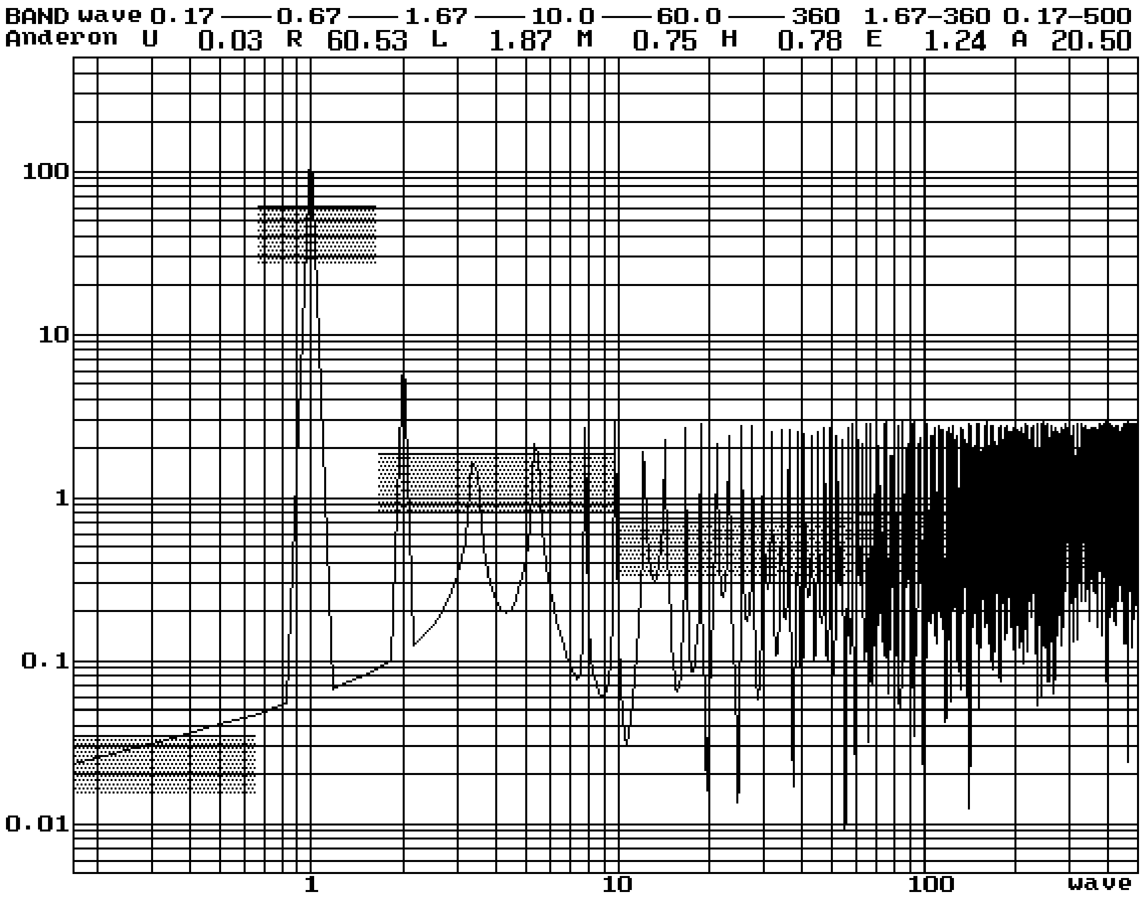


図 13：玉軸受６０８に内輪偏差のみを適用したアンデロン振動スペクトラム計算
Fig. 13 : Calculation example for 608 bearing with only inner race deviation

図 13 は，内輪偏差のみを適用したアンデロン振動スペクトラムの計算結果である．
図 13 が示すアンデロン値は，次の通りである．

Fig.13 shows the calculation example only using the inner race deviation of 608.
Anderon values in Fig.13 are as follows,

L band : 1.87 Anderon, M band 0.75 Anderon, H band 0.78 Anderon

内輪軌道の傾斜が含まれるため，L band の値は，M，および，H band の値より大きい．
偏芯による１wave，傾斜による ２wave 成分の後に， $I_{nZ\pm1}$ [wave] 成分が続いている．
この場合，Ｚ＝７であるから，ｎＺ±１の系列は，次の数列となる．

The L band value is larger than M and H band value for including the inner slant.
The $I_{nZ\pm1}$ [wave] elements appear after the eccentric and slant of 1 and 2 wave.
In this case as 608(Ｚ＝７), the ｎＺ±１ means next progression.

６，８，１３，１５，２０，２２，２７，２９，３４，３６，，，

この最初の I_{7-1} は，次式で得られる．

This first I_{7-1} is shown as follows,

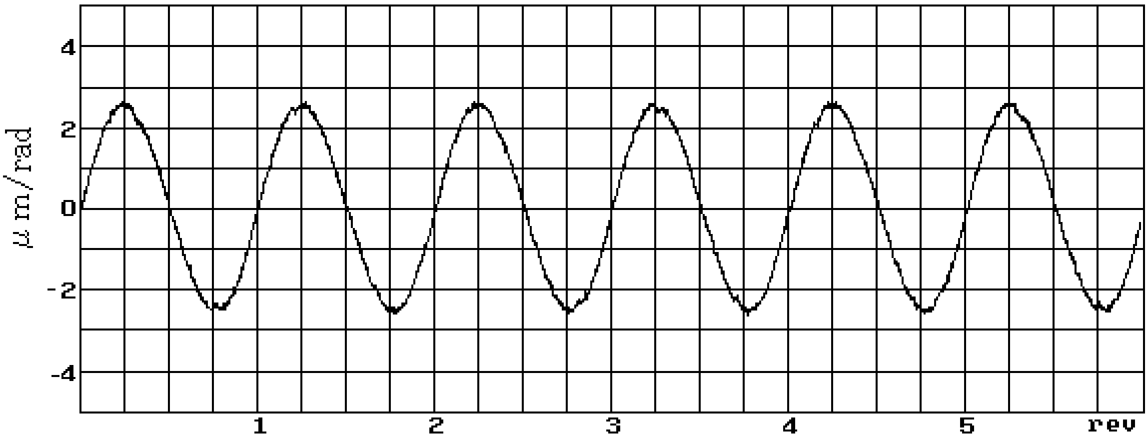
$$I_{7-1} = 7 \times \frac{d_c + d_b \cos\alpha}{2 d_c} - 1 = 3.41198 \quad \cdots (48)$$

図 13 の中で，この I_{7-1} 成分が，裾野を持つ山型に見える．この理由は，計算が６回転分の振動波形によるディスクリートフーリエ変換を使用していることによる．
したがって，$I_{nZ\pm1}$ 成分は，離散スペクトルとして構成されている．

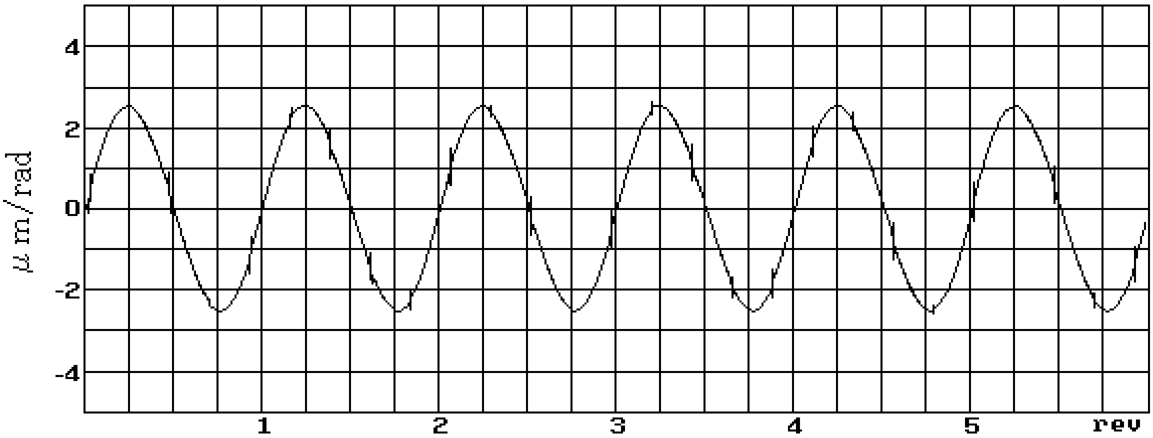
In Fig.13, the I_{7-1} element seems curved line with a peak. The reason of the shape is that the Discrete Fourier Transform is applied for the six revorution waveform.
Therefore, the $I_{nZ\pm1}$ elements are made as the discrete spectra.

図 14a は，内輪のうねりの位相を乱数で作成した波形，図 14b は，位相をすべて 0 として作成した波形である．
この両者は，振幅スペクトラムが同じであり，図 13 で示すペクトラムに一致する．

Fig.14a shows the waveform calculated by random phase waviness, and Fig.14b shows the waveform by all 0 phase waviness.
These two waveforms have same magnitude spectrum shown as Fig.13.



a) 内輪のうねり成分を乱数位相で構成したアンデロン振動の波形計算
Waveform calculated by 608 random phase inner race waviness



b) 内輪のうねり成分を位相 0 で構成したアンデロン振動の波形計算
Waveform calculated by 608 all 0 phase inner race waviness

図 Fig. 14： 玉軸受６０８に内輪のうねりのみ適用したアンデロン振動波形の計算
Waveform calculation for 608 bearing with only inner race wavinesses

図 14b は，内輪軌道にキズがある場合の波形と考えることができる．
これは，偏芯による正弦波に一定間隔のパルスを重ねた波形である．
このパルスの発生頻度は，次式で与えられる．

Fig.14b can be considered the waveform of flawed inner race.
This is the constant distance pulse on the sin wave by the eccentricity.
The pulse frequency is given as follows,

$$Z\cdot\frac{\omega-\omega_c}{\omega} = Z\cdot\frac{d_c + d_b\cos\alpha}{2d_c} \quad \cdots (49)$$

これに，玉軸受６０８の諸元を適用して，次の結果を得る．

Applying the 608 bearing parameter, we get next result.

$$7\times\frac{d_c + d_b\cos\alpha}{2d_c} = 4.41198 \quad \cdots (50)$$

この結果は，図 14b と一致する．

This result matches the Fig.14b.

３．３ 外輪偏差による挙動　Outer race deviation behavior

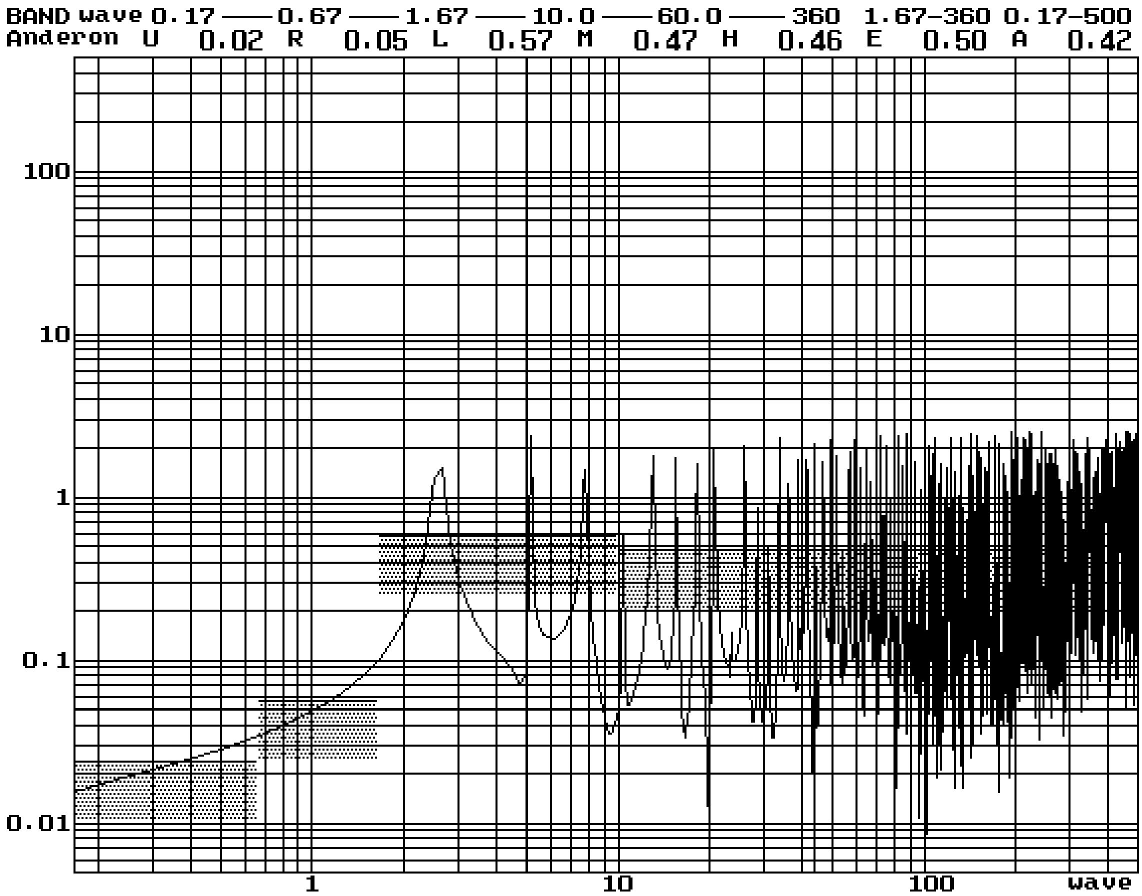


図 15： 玉軸受６０８に外輪偏差のみを適用したアンデロン振動スペクトラム計算
Fig. 15： Calculation example for 608 bearing with only outer race deviation

図 15 は，外輪偏差のみを適用したアンデロン振動スペクトラムの計算結果である．
図 15 が示すアンデロン値は，次の通りである．

Fig.15 shows the calculation example only using the outer race deviation of 608.
Anderon values in Fig.15 are as follows,

L band ： 0.57 Anderon, M band 0.47 Anderon, H band 0.46 Anderon

L, M, および, H band の値は，互いに近い値を示している．
スペクトラムは，O_{nZ} 成分で構成されている．
この場合，ｎＺは，次の数列である．

The L, M, and H band values are similar value each other.
The spectrum is composed of O_{nZ} elements.
In this case, ｎＺ is next progression.

７，１４，２１，２８，３５，４２，４９，５６，，，，，

最初の O_7 は，次式で与えられる．

The first O_7 is given as follows,

$$O_7 = 7 \times \frac{d_c - d_b \cos\alpha}{2 d_c} = 2.58802 \qquad \cdots (51)$$

これは，図 15 の最初のピークと一致する．
次の O_{14} は，次式で与えられる．

This matches the first peak of Fig.15.
The second O_{14} is given as follows,

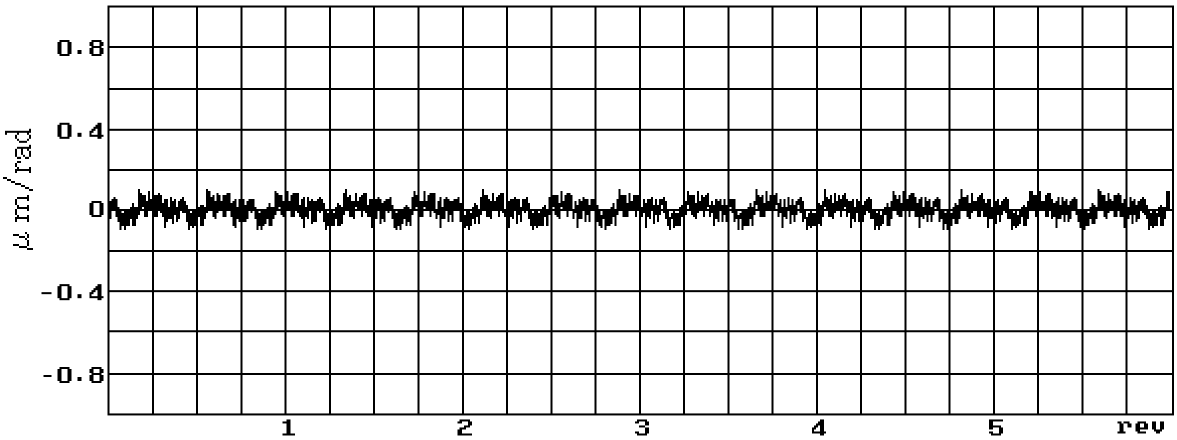
$$O_{14} = 14 \times \frac{d_c - d_b \cos\alpha}{2 d_c} = 5.17603 \qquad \cdots (52)$$

これは，図 15 の２番目のピークと一致する．
このように，外輪偏差によるアンデロン振動は，O_{nZ} 成分の離散スペクトルで構成される．

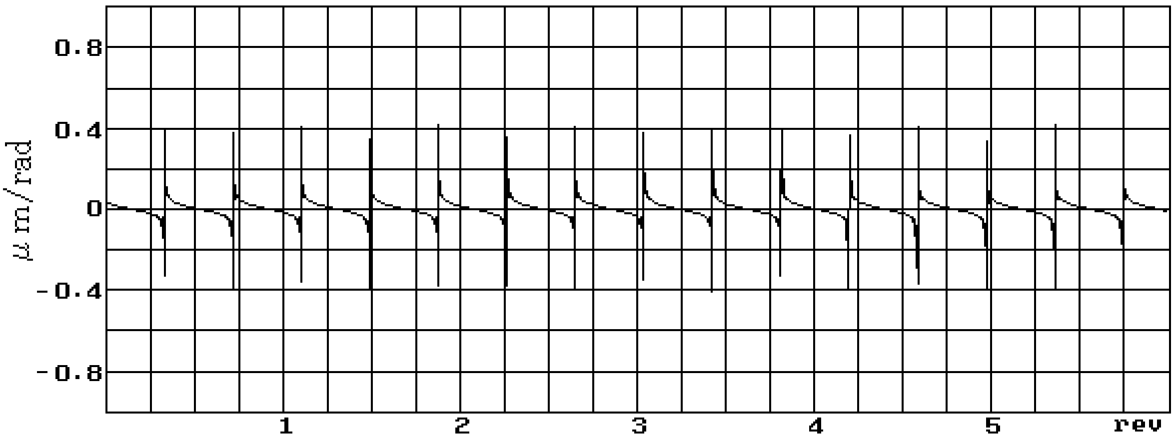
This matches the second peak of Fig.15.
Thus the vibration by outer deviation is composed of O_{nZ} element discrete spectra.

図 16a は，外輪のうねりの位相を乱数で作成した波形，図 16b は，位相をすべて 0 として作成した波形である．
外輪偏差によるアンデロン振動のスペクトラムは，うねりの位相によって振幅が変化する．

Fig.16a shows the waveform calculated by random phase waviness, and Fig.16b shows the waveform by all 0 phase waviness.
The spectrum magnitude made by outer race is changed by the waviness phase.



a) 外輪のうねり成分を乱数位相で構成したアンデロン振動の波形計算
Waveform calculated by 608 random phase outer race waviness



b) 外輪のうねり成分を位相 0 で構成したアンデロン振動の波形計算
Waveform calculated by 608 all 0 phase outer race waviness

図 16：玉軸受６０８に内輪のうねりのみ適用したアンデロン振動波形の計算
Fig. 16 : Waveform calculation for 608 bearing with only inner race wavinesses

図 16b は，外輪軌道にキズがある場合の波形と考えることができる．
これは，一定間隔のパルスに見える波形である．
このパルスの発生頻度は，次式で与えられる．

Fig.16b can be considered the waveform of flawed outer race.
This looks a constant distance pulse.
The pulse frequency is given as follows,

$$Z\cdot\frac{\omega_c}{\omega} = Z\cdot\frac{d_c - d_b\cos\alpha}{2d_c} \quad \cdots (53)$$

これに，玉軸受６０８の諸元を適用して，次の結果を得る．

Applying the 608 bearing parameter, we get next result.

$$7\times\frac{d_c - d_b\cos\alpha}{2d_c} = 2.58802 \quad \cdots (54)$$

この結果は，図 16b と一致する．

This result matches the Fig.16b.

３．４ ボール偏差による挙動 Balls deviation behavior

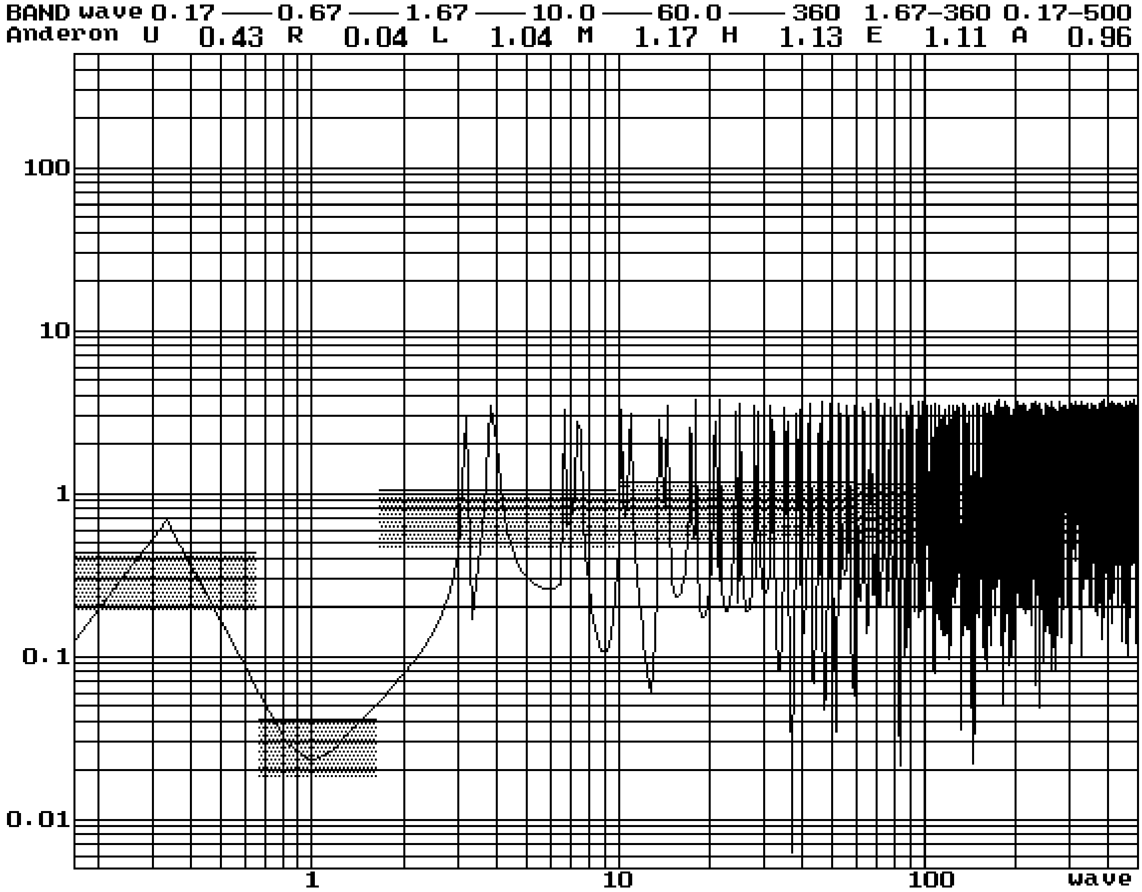


図 17 : 玉軸受６０８にボール偏差のみを適用したアンデロン振動スペクトラム計算
Fig. 17 : Calculation example for 608 bearing with only ball deviation

図 17 は，ボール偏差のみを適用したアンデロン振動スペクトラムの計算結果である．
図 17 が示すアンデロン値は，次の通りである．

Fig.17 shows the calculation example only using the ball deviation of 608.
Anderon values in Fig.17 are as follows,

L band ： 1.04 Anderon, M band 1.17 Anderon, H band 1.13 Anderon

L，M，および，H band の値は，互いに近い値を示している．
最初のピークは，$B_{A0}=-B_{B0}$ の成分である．

The L, M, and H band values are similar value each other.
The first $B_{A0}=-B_{B0}$ is as follows,

$$B_{A0} = -B_{B0} = \frac{d_c - d_b\cos\alpha}{2d_c} = 0.369716 \quad \cdots (55)$$

図 17 からは，０．３４程度と読み取れる値が，これは，計算の分解能が低いためと考える．
次のピークは，B_{B1} と B_{A1} の成分である．

In fig.17 it looks approx. 0.34, we guess it is for low precision of calculation.
The next B_{B1} and B_{A1} are as follows,

$$B_{B1} = 2\times\frac{d_c^2 - d_b^2\cos^2\alpha}{2d_bd_c} - \frac{d_c - d_b\cos\alpha}{2d_c} = 3.15316 \quad \cdots (56)$$

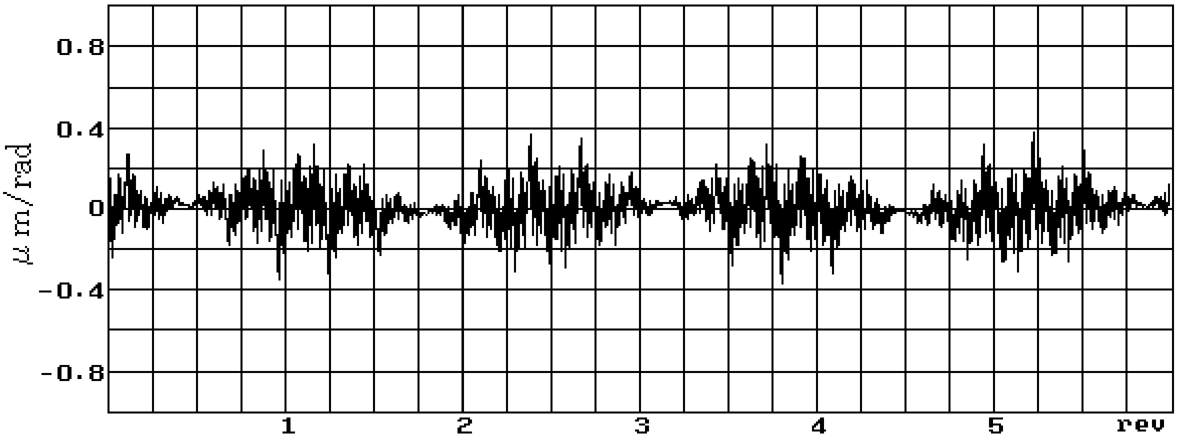
$$B_{A1} = 2\times\frac{d_c^2 - d_b^2\cos^2\alpha}{2d_bd_c} + \frac{d_c - d_b\cos\alpha}{2d_c} = 3.89259 \quad \cdots (57)$$

これは，図 17 のピークと一致する．

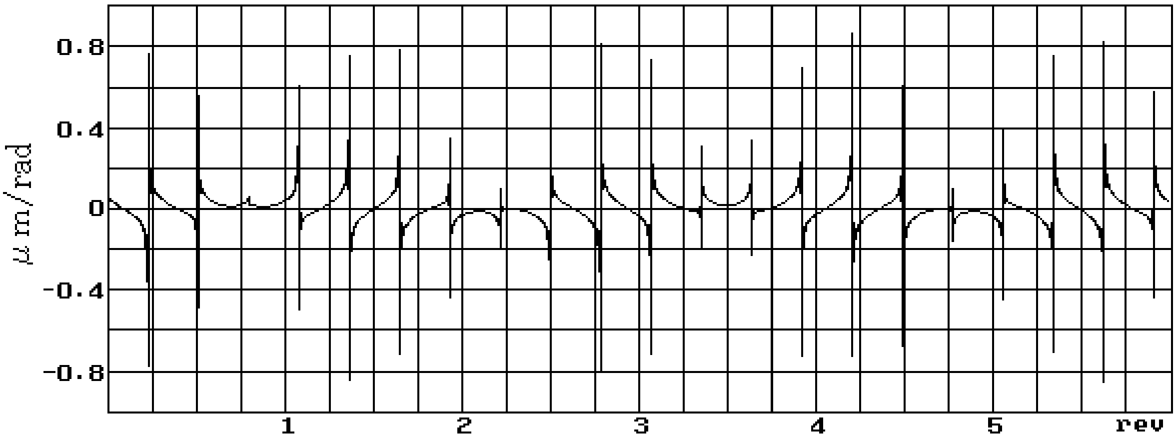
This matches the peakes in Fig.17.

図 18a は，ボールのうねりの位相を乱数で作成した波形，図 18b は，位相をすべて 0 として作成した波形である．
この両者は，振幅スペクトラムが同じであり，図 17 で示すペクトラムに一致する．

Fig.18a shows the waveform calculated by random phase waviness, and Fig.18b shows the waveform by all 0 phase waviness.
These two waveforms have same magnitude spectrum shown as Fig.17.



a) ボールのうねり成分を乱数位相で構成したアンデロン振動の波形計算
Waveform calculated by 608 random phase ball waviness



b) ボールのうねり成分を位相 0 で構成したアンデロン振動の波形計算
Waveform calculated by 608 all 0 phase ball waviness

図 Fig. 18： 玉軸受６０８にボールのうねりのみ適用したアンデロン振動波形の計算
Waveform calculation for 608 bearing with only ball wavinesses

図 18b は，ボールの表面にキズがある場合の波形と考えることができる．
これは，振幅変調を伴った一定間隔のパルスに見える波形である．
このパルスの発生頻度は，次式で与えられる．

Fig.18b can be considered the waveform of flawed ball surface.
This looks a constant distance pulse with the magnitude modulation.
The pulse frequency is given as follows,

$$2\cdot\frac{\omega_b}{\omega} = 2\cdot\frac{d_c^2 - d_b^2\cos^2\alpha}{2\,d_b\,d_c} \qquad \cdots\ (58)$$

これに，玉軸受６０８の諸元を適用して，次の結果を得る．

Applying the 608 bearing parameter, we get next result.

$$2\times\frac{d_c^2 - d_b^2\cos^2\alpha}{2\,d_b\,d_c} = 3.52287 \qquad \cdots\ (59)$$

この結果は，図 18b と一致する．

This result matches the Fig.18b.

３．５ 計算モデルの挙動のまとめ Summary of calculation model behavior

表２は，図 13，15，および，17 が示す値の２乗和の平方根の値を，図 12 が示す値と比較する表である．両者は，ほぼ，一致している．

Tab.2 shows the comparison between root sum square of Fib.13, 15, and 17 values, and Fig.12 values. They seem same values.

表２：アンデロン振動の総合値と内輪，外輪，ボール偏差による値の比較
Tab.2：Comparison of Anderon total and inner/outer/ball deviation value

Band	Fig.12 総合 Total	i:Fig.13 内輪 Inner	o:Fig.15 外輪 Outer	b:Fig.17 ボール Ball	$\sqrt{i^2+o^2+b^2}$
L	2.16	1.87	0.57	1.04	2.21
M	1.46	0.75	0.47	1.17	1.46
H	1.45	0.78	0.46	1.13	1.45

表３に，内輪，外輪，および，ボールの偏差の要因と，発生する波数成分の関係をまとめる．これは，アンデロン振動についての従来からの結論[3)]と，傾斜の要因を除いて一致している．

Tab.3 shows inner/outer/ball deviation factor and the generated frequency. This table contents match the result of dealt Anderon vibration[3)] without slant.

表３：内輪，外輪，ボールの要因とアンデロン振動の発生周波数の関係
Tab.3：Relation between inner/outer/ball factor and vibration frequency

部品 Part	要因 Factor	振動周波数 Vibration frequency wave
内輪 Inner	偏芯 Eccentricity	1
	傾斜 Slant	2
	うねり Waviness nZ±1	$nZ\cdot\frac{d_c+d_b\cos\alpha}{2d_c} \pm 1$
	キズ Flaw	$Z\cdot\frac{d_c+d_b\cos\alpha}{2d_c}$
外輪 Outer	うねり Waviness nZ±1	$nZ\cdot\frac{d_c-d_b\cos\alpha}{2d_c}$
	キズ Flaw	$Z\cdot\frac{d_c-d_b\cos\alpha}{2d_c}$
ボール Ball	異径 Diameter error	$\frac{d_c-d_b\cos\alpha}{2d_c}$
	うねり Waviness 2n	$2n\cdot\frac{d_c^2-d_b^2\cos^2\alpha}{2d_bd_c} \pm \frac{d_c-d_b\cos\alpha}{2d_c}$
	キズ Flaw	$2\cdot\frac{d_c^2-d_b^2\cos^2\alpha}{2d_bd_c}$

n：正の整数 Positive integer
Z：ボールの総数 Ball quantity
α：ボールの接触角 Ball contact angle
d_b：ボールの直径 Ball diameter
d_c：ボールの公転径 Ball orbital diameter

３．５ 実測結果との比較 Comparison with measurement

図 19 は，玉軸受６０８をアンデロンメータで測定して得た波形の例である．
これは，図 11 の波形とよく似ている．

Fig.19 shows the measurement waveform of a 608 bearing by our ANDERON METER.
This is similar to the Fig.11 waveform.

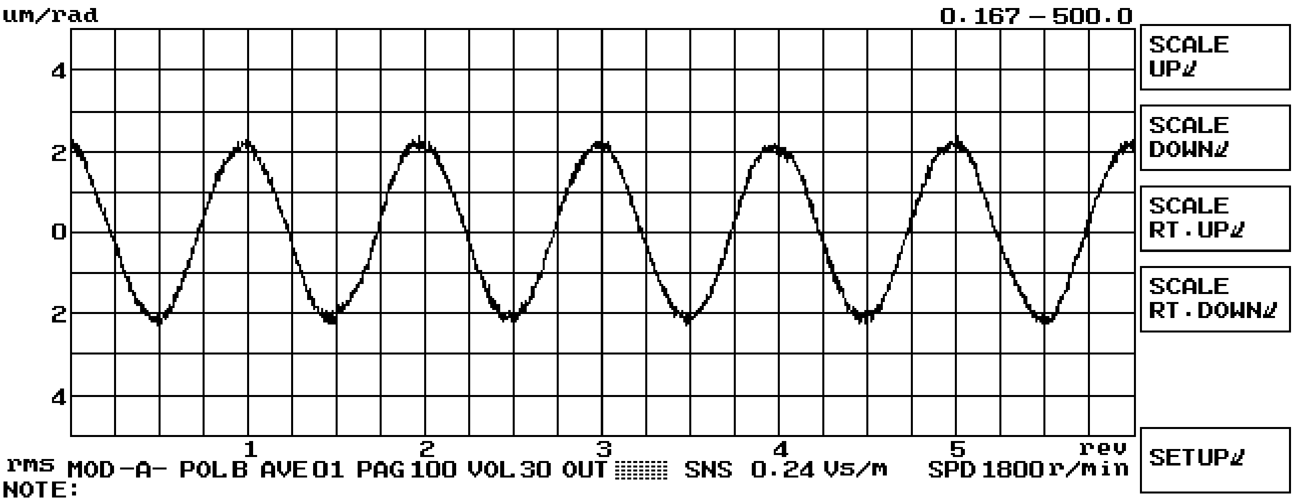


図 19： 玉軸受６０８を アンデロンメータ ADA-100 で測定した波形
Fig. 19 : Measurement waveform of a 608 bearing by the ANDERON METER ADA-100

図 20 は，玉軸受６０８をアンデロンメータで測定して得たスペクトラムの例である．
これは，図 12 と比較されるべき図である．

Fig.20 shows the measurement spectrum of same 608 bearing by our ANDERON METER.
This is to be compared with Fig.12.

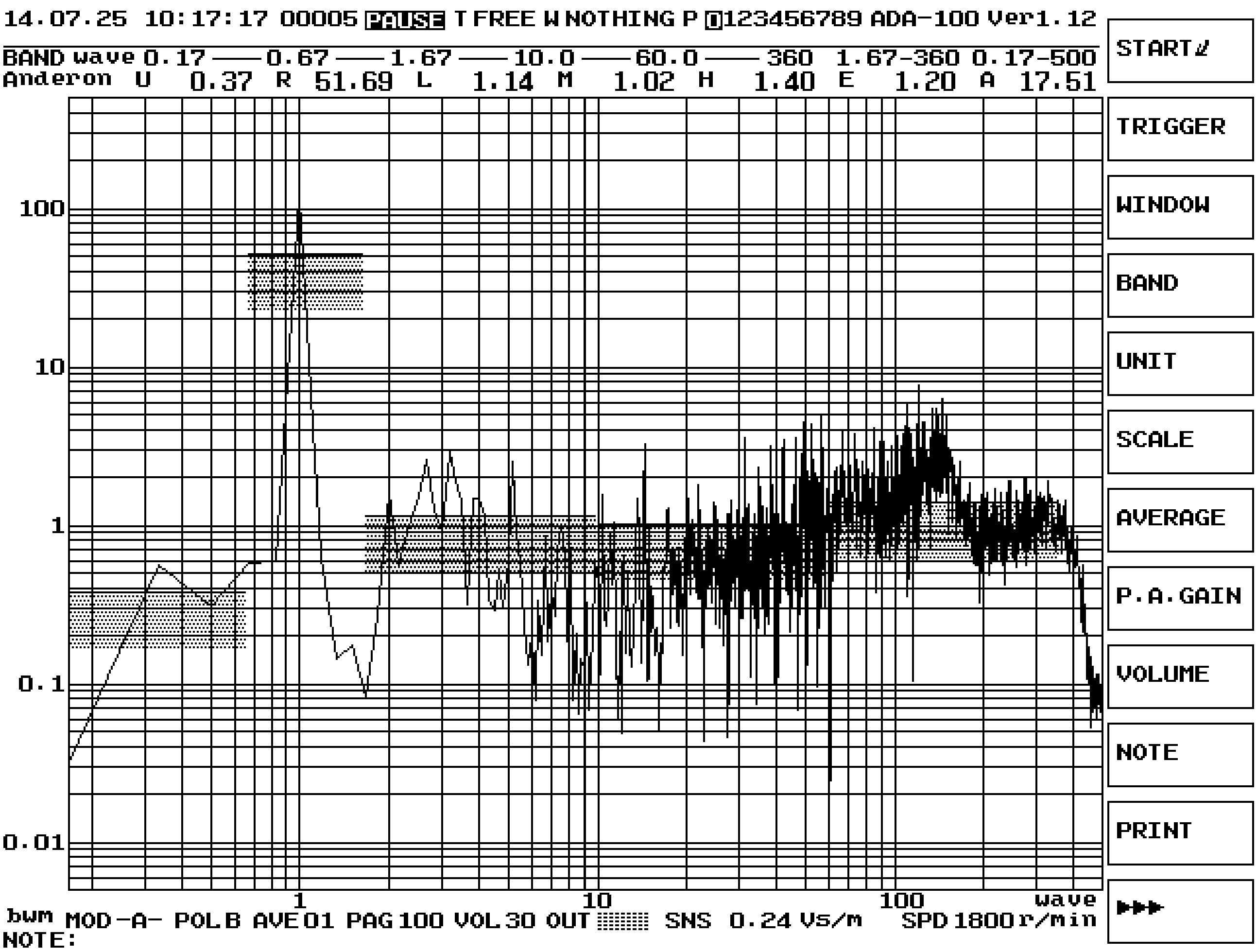


図 20： 玉軸受６０８を アンデロンメータ ADA-100 で測定した結果
Fig. 20 : Measurement result of a 608 bearing by the ANDERON METER ADA-100

図 20 が示すアンデロン値は，次の通りである．

Anderon values in Fig.20 are as follows,

L band : 1.14 Anderon, M band 1.02 Anderon, H band 1.40 Anderon

これは，図 12 のアンデロン値と近い値となっているから，この玉軸受を構成する内輪，外輪，および，ボールの偏差は，式 43 ～ 式 47 で設定した値に近いと推測される．
内輪の傾斜の成分 2 wave の値が小さいため，L band の値が図 12 より小さくなっている．
図 20 において，400 wave 以上の成分が急速に減衰している．
これは，ハードウェアによるローパスフィルタが，ADA-100 に使用されているためである．
図 20 において，内輪，外輪，および，ボールの偏差によって生じる振動成分が認められるが，個々の成分は，図 12 と比較し，不規則に上下している．
これは，実際の内輪，外輪，および，ボールの偏差の特徴を反映したものと推測される．
したがって，ここで構成したアンデロン振動の計算モデルは，アンデロンメータの測定結果を解釈する有効な手段であると言える．

These values are near to Fig.12 values, therefore, the value of inner/outer/ball deviations of this bearing shall be near the value set by formula 43 ～ 47.
For small inner slant 2 wave magnitude, the L band value is smaller than Fig.12.
Over 400 wave elements are attenuated rapidly in Fig.20.
Because, the hardware low-pass filter is used in this ANDERON METER ADA-100.
The vibration elements made by the inner/outer/ball are recognized in Fig.20, but each element magnitude has larger up/down than that of Fig.12.
It shall be shown the feature of actual inner/outer/ball deviations.
Therefore, this calculation model gives one of effective methods to interpret the ANDEON METER measurement result.

参考文献 Reference

1) L.Chaney, E.Bragg, J.Trytten and E.Abbott, The Anderometer, Mechanical Engineering 66: 515-518 (1944)

2) S.Timoshenko and J.N.Goodier, Theory of Elasticity, McGraw-Hill 372 (1951)

3) T.Igarashi, Noise of Rolling Bearings and Countermeasures, TRANSACTIONS OF THE JAPAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS 80-708 (1977)

4) T.Momono and B.Noda, Sound and Vibration of Rolling Bearings, Motion & Control No.6 (1999)

5) T.Sakaguchi and Y.Akamatsu, Simulation for Ball Bearing Vibration, NTN TECHNICAL REVIEW No.69 (2001)